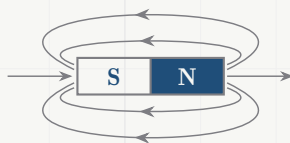
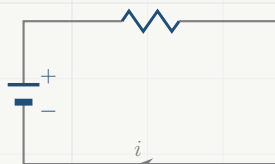
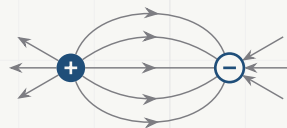
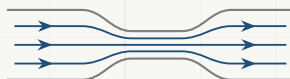
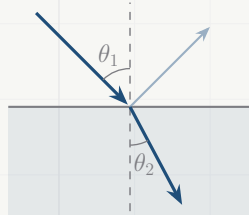
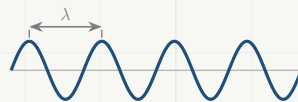
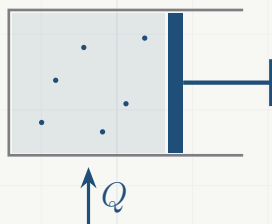
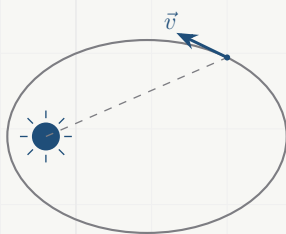
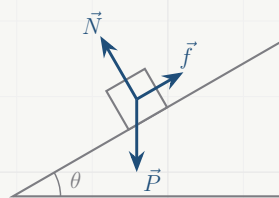
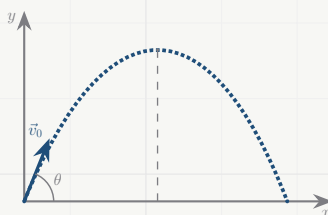
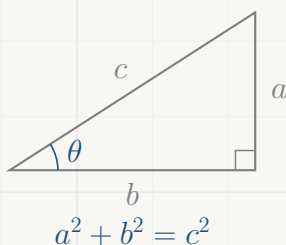


O Básico da Física Básica

Matemática para a Física



Prof. Dr. Michel Silva dos Santos

O Básico da Física Básica

Volume 1

Matemática para a Física

1ª edição

São Borja, RS

2026

ISBN 978-65-02-23695-6

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Santos, Michel Silva dos

O básico da física básica [livro eletrônico] :
matemática para a física / Michel Silva dos Santos.

-- 1. ed. -- São Borja, RS : Ed. do Autor, 2026.

-- (O básico da física básica ; v. 1)

PDF

Bibliografia.

ISBN 978-65-02-23695-6

1. Física (Ensino médio) 2. Geometria
3. Matemática (Ensino médio) 4. Trigonometria (Ensino
médio) 5. Vetores (Matemática) I. Título II. Série.

26-378442.1

CDD-510.78

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.78

Camila Aparecida Rodrigues - Bibliotecária CRB -
SP-010133/O

Apresentação

Antes de mais nada, é importante dizer o que é este material e por que ele foi escrito da forma como está. Esta é uma coleção de física básica, pensada para o ensino médio, e este texto de apresentação se repete no início de todos os volumes, pois trata da obra como um todo, e não de um assunto específico. A ideia central, aquela que guiou cada escolha daqui para frente, é fugir um pouco dos livros didáticos tradicionais. Não por acaso, o próprio nome da coleção já diz a que veio: reunir o básico da física básica, de maneira enxuta, direta e prática, respeitando a carga horária reduzida com que a física costuma ser estudada nessa etapa.

Um ponto que preciso explicitar logo de início diz respeito à parte visual. Na minha percepção, os livros didáticos atuais sofrem de uma certa poluição de imagens: são tantas figuras, cores, boxes e chamadas que, muitas vezes, o aluno acaba se perdendo e o foco no texto fica em segundo plano. Por isso optei por um material mais sóbrio, em preto e branco, com as figuras reduzidas ao que é realmente necessário para o entendimento. A intenção é que o foco esteja no transcorrer do texto, na leitura e no raciocínio que ela vai construindo. É preciso reconhecer que, para um aluno acostumado ao excesso de imagens, começar por um material assim pode parecer estranho, e até difícil no início. Mas, dada uma chance ao método, tenho convicção de que este formato será muito útil para muitos estudantes.

Outra escolha que merece ser destacada é o uso intenso de exemplos resolvidos. Ao longo de todo o material, sempre que apresento um conteúdo, procuro logo em seguida situá-lo na parte prática, que é justamente onde mora a maior dificuldade dos estudantes. É uma coisa entender a explicação e outra, bem diferente, conseguir aplicar aquilo num exercício. Por isso os exemplos aparecem com tanta frequência, resolvidos passo a passo. Na mesma linha, as listas de exercícios foram pensadas para serem sucintas e com nível de dificuldade progressivo. Os primeiros exercícios de cada lista são, propositalmente, muito próximos dos exemplos resolvidos, e os maiores desafios ficam reservados para o final. A ideia aqui é psicológica: quando o aluno começa a lista conseguindo resolver, ele ganha confiança, e vai pensando “já que cheguei até aqui, vou concluir”. Já quando o aluno começa uma lista sem conseguir fazer nem o primeiro item, acontece o contrário, ele perde a vontade de encarar o desafio. Note que essa diferença, que parece pequena, muda completamente a disposição de quem estuda.

Vale ainda um registro sobre a origem deste material, pois ele ajuda a entender algumas escolhas. Este trabalho começou a ser escrito no período da pandemia. Naquele tempo, o uso de inteligências artificiais ainda não era generalizado como é hoje, e o aluno estudava basicamente por três caminhos: os livros, as videoaulas e a exposição do professor. Eu costumo dizer que essas três coisas, um livro, uma

videoaula e um professor, são ferramentas para o desenvolvimento do conhecimento, cada uma com sua vantagem e sua limitação. Um livro está revisado, tem sua estrutura pensada com calma e traz o conhecimento necessário ali descrito; mas o livro não se adapta ao aluno, e se o estudante não entender um parágrafo, por mais que releia, o livro vai responder sempre da mesma forma. Uma videoaula foi editada, e nela o apresentador pode até fazer surgir um balãozinho mostrando dois carros colidindo, com recursos visuais que ajudam; mas, assim como o livro, se o aluno voltar o vídeo, ele responderá igual, e é o aluno quem precisa se adaptar. Já o professor talvez não tenha a mesma organização e a mesma escrita revisada de um livro, e quando fala de dois carros colidindo precisa acreditar que os alunos estão imaginando a cena correta; mas o professor tem um trunfo que os outros não têm, que é justamente se adaptar ao aluno. Muitas vezes o estudante nem percebeu que não entendeu algo, e o professor, observando, consegue focar exatamente naquele ponto. São, portanto, ferramentas distintas, cada qual com suas qualidades e suas dificuldades.

Acontece que, hoje, com a inteligência artificial, essa história mudou. A IA pode reunir o melhor de todas essas ferramentas ao mesmo tempo. O problema é que ela é tão boa que a facilidade que gera pode se transformar numa grande dificuldade. Quando a IA passa a resolver tudo, e o aluno não tem mais paciência para pensar, o aluno simplesmente deixa de aprender. Ele não constrói o próprio conhecimento, porque a resposta vem fácil demais, o entendimento vem fácil demais, e aquilo não fixa nem gera um conhecimento seu, com o seu formato. É esse formato pessoal que faz a ciência evoluir, pois são as diferentes maneiras que cada um tem de aprender que levam as pessoas a pensarem diferente sobre as mesmas coisas e, com isso, a avançarem sobre um assunto. Hoje o aluno consegue a lista inteira resolvida em segundos, sem pensar. Mas é preciso ter claro que isso é enganar a si mesmo, porque ter a lista completa nunca foi o importante. Certamente aprendeu mais o aluno que fez trinta por cento da lista pensando por conta própria, sem recorrer à IA, do que aquele que entregou cem por cento sem dedicar tempo nem raciocínio.

Isso não quer dizer que a inteligência artificial deva ser evitada, muito pelo contrário. Existe, sim, uma maneira certa de trabalhar com ela e, aí sim, construir conhecimento próprio: usá-la como suporte, e não como atalho. Em vez de pedir a resposta, pergunte a ela o que você poderia estudar para conseguir resolver aquilo. Diga algo como “aja como um professor e me explique o conteúdo necessário para eu desenvolver as habilidades de resolver este problema”. Ou seja, peça ajuda sem pedir a resposta pronta. Dê a si mesmo a chance de resolver sozinho, deixando a IA auxiliar sem pensar no seu lugar. É uma diferença sutil, mas é ela que separa quem usa a ferramenta a favor do aprendizado de quem a usa contra o próprio aprendizado.

Preciso também salientar que tenho consciência de que nem todos os conteú-

dos aqui reunidos serão trabalhados ao longo do ensino médio. As escolas têm estruturas e matrizes curriculares diferentes, e por isso dedicam tempos distintos a uma mesma disciplina. Num mundo ideal, o aluno estudaria toda esta física básica; na prática, cada realidade vai aproveitar o que for possível. Além disso, este material não foi pensado apenas para o estudante. Ele tem também o intuito de auxiliar o professor de física, oferecendo exemplos resolvidos, sequências didáticas e listas de exercícios de boa acessibilidade, de modo que colegas com diferentes experiências e diferentes níveis de formação possam fazer uso dele em suas aulas.

E aqui chego ao ponto em que mais acredito, e que resume o espírito de tudo o que foi dito até agora. Eu não acredito na ideia de que o conhecimento seja transposto pronto de uma pessoa para outra, como quem entrega um objeto de mão em mão. Para mim, o conhecimento é sempre construído por dentro, individualmente, por cada um que estuda; o livro, a videoaula, o professor e até a inteligência artificial são apenas ferramentas nessa construção, e nenhum deles aprende no lugar do aluno. E, longe de ser um problema, isso é a parte mais bonita da coisa. É justamente porque cada um constrói o conhecimento à sua maneira que ele se fixa, se torna seu de verdade e permanece. Mais do que isso: são essas formas pessoais e diferentes de entender um mesmo assunto que fazem uma pessoa pensar o que outra não pensou, e é daí, dessa diversidade de olhares, que a ciência avança. Por isso, o esforço de construir o próprio conhecimento não é um obstáculo a ser evitado; é exatamente ali que o aprendizado de verdade acontece.

O que fica, no fim das contas, é o básico da física básica que todo aluno deveria conhecer ao concluir o ensino médio: um pilar para quem seguirá na área de exatas e uma base de cultura científica para os demais. Dada uma chance ao método, com calma e dedicação, tenho certeza de que este caminho valerá a pena.

Sumário

Apresentação	i
Por que a matemática vem antes da física?	vii
1 Operações Matemáticas Fundamentais	1
1.1 Equações e igualdade	2
1.2 Operações básicas	2
1.3 Isolamento de variáveis	4
1.4 Sistemas simples	8
Lista de exercícios 1	16
2 Razões, Proporções e Regra de Três	17
2.1 Razão e proporção	18
2.2 Grandezas direta e inversamente proporcionais	20
2.3 Regra de três simples	22
2.4 Porcentagem	24
2.5 Escalas	26
Lista de exercícios 2	28
3 Notação Científica e Ordem de Grandeza	29
3.1 Ordem de Grandeza	35
3.2 Algarismos Significativos	38
3.3 Adição	41
3.4 Subtração	44
3.5 Multiplicação	46
3.6 Divisão	48
3.7 Exponenciação	49
3.8 Radiciação	50
Lista de exercícios 3	52
4 Funções e Gráficos para Física	55
4.1 O que é uma função	56
4.2 Função de primeiro grau	58
4.3 Função quadrática	59
4.4 Sistemas de coordenadas	60
4.5 Leitura de gráficos físicos	62
Lista de exercícios 4	67

5	Trigonometria Essencial para Física	69
5.1	Seno	72
5.2	Cosseno	72
5.3	Tangente	73
5.4	Funções Inversas	74
5.5	Ângulos no círculo trigonométrico	78
	Lista de exercícios 5	81
6	Geometria Essencial para Física	85
6.1	Áreas fundamentais	86
6.2	Volumes essenciais	89
6.3	Distância entre dois pontos	92
	Lista de exercícios 6	94
7	Vetores	95
7.1	Grandezas vetoriais	96
7.2	Módulo, direção e sentido	96
7.3	Soma e diferença	97
	7.3.1 Soma pelo método geométrico	97
	7.3.2 Subtração pelo método geométrico	99
7.4	Componentes e decomposição	100
7.5	Vetores unitários	104
	Lista de exercícios 7	107
	Papel milimetrado	109
A	Gabarito	111
	Bibliografia	115

Por que a matemática vem antes da física?

Antes de começarmos de fato a estudar física, precisamos parar em um ponto que quase sempre é deixado de lado, mas que é onde muitos alunos acabam tropeçando. A física, como veremos ao longo desta coleção, é a ciência que busca entender e descrever a natureza. E acontece que a linguagem que usamos para descrever a natureza, de forma precisa e sem margem para dúvida, é a matemática. Dito isso, não há como fugir: para aprender física, precisamos antes ter em mãos as ferramentas matemáticas certas.

Note que a palavra “ferramenta” aqui é proposital. A matemática, para nós, será uma caixa de ferramentas. Quando um mecânico vai apertar um parafuso, ele não estuda a fundo a metalurgia da chave de boca; ele simplesmente sabe usar a chave. Conosco será parecido. Não vamos nos aprofundar em cada assunto matemático como faria um matemático, e sim aprender a usar cada ferramenta no momento em que a física precisar dela. É por isso que este primeiro volume existe: ele reúne, de forma enxuta e prática, o mínimo de matemática que você vai empregar o tempo todo nos volumes seguintes.

E aqui vem um ponto importante. Muitos dos assuntos que veremos são, sim, estudados na matemática do ensino fundamental e médio: as operações, o isolamento de variáveis, as razões e proporções, as funções e um pouco de geometria e trigonometria. Estes você provavelmente já viu, e aqui faremos uma revisão voltada para o uso que a física fará deles. Porém há duas ferramentas que, na maioria das escolas, ou não são estudadas, ou são vistas de forma muito rápida: a notação científica e os vetores. E, justamente essas duas, serão absolutamente essenciais para a física.

A notação científica aparece porque a física trabalha com números em escalas absurdamente diferentes. Vamos lidar com a massa de um elétron, que é um número pequeníssimo, e com a distância entre galáxias, que é um número gigantesco. Escrever esses valores com todos os seus algarismos seria não só cansativo como também uma fonte enorme de erros. A notação científica resolve isso de forma elegante, e por isso dedicaremos um capítulo inteiro a ela. Devemos ter claro que, sem dominar a notação científica, boa parte das contas da física se torna impraticável.

Já os vetores aparecem porque muitas das grandezas da física não ficam completamente descritas apenas por um número. Quando falamos em uma força, em uma velocidade ou em uma aceleração, precisamos saber não só o quanto, mas

também para onde. E é exatamente isso que um vetor representa. Aqui seu mundo matemático vai se ampliar: veremos que, com vetores, nem sempre $2 + 2$ resulta em 4, e entender isso desde já vai poupar muita confusão lá na frente. Por isso, mesmo que você nunca tenha ouvido falar em vetores, não se preocupe: vamos construir esse conhecimento do zero.

Ao longo de todo este volume, sempre que apresentarmos uma nova parte da matemática, vamos procurar deixar claro por que ela está ali e onde ela vai ser usada na física. Não faz sentido estudar uma técnica sem saber para que serve, e por isso, em cada capítulo, você encontrará essa ponte entre a matemática que estamos vendo e a física que vem depois. Note que esse é justamente o diferencial deste material: não é uma revisão de matemática qualquer, e sim uma revisão de matemática pensada para quem vai estudar física.

Assim, este volume é o alicerce de toda a coleção. Se ele estiver bem construído, tudo o que vier depois, movimento, energia, calor, luz, eletricidade, será muito mais tranquilo de acompanhar. Se ele estiver frágil, cada novo assunto de física vai parecer mais difícil do que realmente é, não pela física em si, mas pela matemática que faltou. Vamos então, com calma e dedicação, montar essa caixa de ferramentas.



Operações Matemáticas Fundamentais

O que você vai aprender

- Entender o papel do sinal de igualdade em uma equação.
- Reconhecer as operações que preservam a igualdade.
- Isolar uma variável qualquer dentro de uma equação.
- Resolver sistemas simples de duas e três incógnitas.

Por que estudamos isto? Toda a física é escrita em equações, e resolver um problema quase sempre significa isolar a grandeza que queremos, seja a força, a velocidade ou o tempo. É essa manipulação de equações que revisamos aqui, e ela será usada em absolutamente todos os volumes.

1.1 Equações e igualdade

No ensino fundamental estudamos diferentes expressões e equações matemáticas. O que nos importa aqui é saber usar corretamente as propriedades matemáticas aplicadas a elas. Na física, usaremos letras para designar diferentes **grandezas físicas**. A matemática aplicada às letras é a mesma aplicada aos números. Aqueles vários exercícios que o professor de matemática solicitava que fossem feitos, onde deveríamos descobrir os valores de (x) , por exemplo, nos serão agora úteis. Usaremos letras diversas para simbolizar grandezas diversas, mas basicamente a grandeza buscada terá o mesmo papel que o (x) tinha nas aulas de matemática. Se você aprendeu as operações com o (x) , agora saberá fazer com o (F) , (m) , (a) , (S) , (v) , etc. Saber isolar variáveis é o primeiro passo para usar equações. Devemos ter claro que uma equação do tipo

$$F = m \cdot a$$

é exatamente a mesma quando representada nas formas

$$\frac{F}{a} = m, \quad \frac{F}{m} = a, \quad a = \frac{F}{m}, \quad m = \frac{F}{a};$$

e somente poderá ser resolvida quando **duas** das **três** grandezas apresentadas $(F, m \text{ e } a)$ forem conhecidas.

1.2 Operações básicas

Antes de resolver equações mais complicadas, precisamos ter claro quais operações podemos fazer sem alterar a igualdade. Uma equação apresenta duas expressões ligadas pelo sinal de igualdade. Resolver a equação é encontrar os valores

que fazem os dois lados terem o mesmo resultado.

Ao resolver uma equação, fazemos a mesma operação nos dois lados para não alterar os valores que tornam a igualdade verdadeira.

Somar, subtrair, multiplicar ou dividir os dois lados por uma mesma quantidade preserva a igualdade, respeitando a impossibilidade de dividir por zero. Também podemos usar potências e raízes nos dois lados. Nesse caso, conferimos cada resposta na equação original, pois pode aparecer um valor que não funciona ou alguma resposta pode ficar de fora. É justamente aplicando essas operações, uma de cada vez, que conseguimos isolar a variável que procuramos, como faremos a seguir.

Exemplo 1.1

Isole a variável x na equação $2x + 6 = 10$.

Para deixar o termo com x sozinho, subtraímos 6 dos dois lados:

$$\begin{aligned}2x + 6 &= 10 \\2x &= 10 - 6 \\2x &= 4\end{aligned}$$

Agora dividimos os dois lados por 2:

$$\begin{aligned}\frac{2x}{2} &= \frac{4}{2} \\x &= 2\end{aligned}$$

Vejamos mais dois casos, sempre com a mesma ideia: aplicar a mesma operação nos dois lados até a variável ficar sozinha.

Exemplo 1.2

Isole a variável x na equação $\frac{x}{4} + 3 = 7$.

Primeiro subtraímos 3 dos dois lados, pois é o que está somando junto de x :

$$\begin{aligned}\frac{x}{4} + 3 &= 7 \\ \frac{x}{4} &= 7 - 3\end{aligned}$$

$$\frac{x}{4} = 4$$

Como x está dividido por 4, fazemos a operação contrária e multiplicamos os dois lados por 4:

$$\begin{aligned}4 \cdot \frac{x}{4} &= 4 \cdot 4 \\ x &= 16\end{aligned}$$

Exemplo 1.3

Isole a variável x na equação $5x - 8 = 2x + 7$.

Desta vez a variável aparece nos dois lados. Começamos juntando os termos com x de um lado só, subtraindo $2x$ dos dois lados:

$$\begin{aligned}5x - 8 &= 2x + 7 \\ 5x - 2x - 8 &= 7 \\ 3x - 8 &= 7\end{aligned}$$

Agora somamos 8 dos dois lados e, em seguida, dividimos por 3:

$$\begin{aligned}3x &= 7 + 8 \\ 3x &= 15 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{15}{3} \\ x &= 5\end{aligned}$$

1.3 Isolamento de variáveis

Na equação a seguir existe uma maior complexidade para isolar os termos.

$$S = S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad (1.1)$$

Se a incógnita a ser descoberta for a representada pela letra (S_0) , temos que fazer as seguintes manipulações na equação 1.1

$$S = S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$S - v_0 \cdot t = S_0 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$S - v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = S_0$$

$$\boxed{S_0 = S - v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$$

No caso em que a incógnita a ser descoberta na equação 1.1 é (v_0) , temos

$$S = S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$S - S_0 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$S - S_0 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = v_0 \cdot t$$

$$\frac{S - S_0 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}{t} = v_0$$

$$\boxed{v_0 = \frac{S - S_0 - \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}{t}}$$

Um pouco mais complicado é o caso em que a incógnita buscada é a representada por (a) :

$$S = S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$S - S_0 - v_0 \cdot t = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$2 \cdot (S - S_0 - v_0 \cdot t) = a \cdot t^2$$

$$\frac{2 \cdot (S - S_0 - v_0 \cdot t)}{t^2} = a$$

$$\frac{2 \cdot S - 2 \cdot S_0 - 2 \cdot v_0 \cdot t}{t^2} = a$$

$$\boxed{a = \frac{2 \cdot S - 2 \cdot S_0 - 2 \cdot v_0 \cdot t}{t^2}}$$

Na situação em que a incógnita buscada for (t) , temos uma complexidade ainda maior, pois necessitaremos resolver essa equação de 2º grau com o uso da conhecida fórmula de Bhaskara. Este procedimento é utilizado quando $a \neq 0$. Se $a = 0$, a equação deixa de ser de segundo grau e pode ser resolvida de forma mais simples. Assim, primeiro manipulamos a equação 1.1

$$S = S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

que pode ser escrita, sem nenhuma alteração, na forma

$$S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = S$$

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + S_0 = S$$

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + S_0 - S = 0 \quad (1.2)$$

Lembrando que a equação de segundo grau tem o seguinte formato

$$A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0 \quad (1.3)$$

e solução

FÓRMULA DE BHASKARA

$$x' \text{ e } x'' = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A}$$

(1.4)

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$x', x'' \rightarrow$ as **raízes da equação**, isto é, os valores de x que a tornam verdadeira
 $A, B, C \rightarrow$ os coeficientes da equação $Ax^2 + Bx + C = 0$

Podemos notar que, comparando 1.2 com 1.3 e reparando que (t) faz o papel de (x) , temos

$$\underbrace{\frac{1}{2} \cdot a}_{=A} \cdot t^2 + \underbrace{v_0}_{=B} \cdot t + \underbrace{S_0 - S}_{=C} = 0$$

A solução de 1.2 será, conforme a fórmula de Bhaskara,

$$t' \text{ e } t'' = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot (S_0 - S)}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a}$$

$$t' \text{ e } t'' = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot a \cdot (S_0 - S)}}{a}$$

Num problema físico, nem todo valor de t encontrado corresponde a um instante possível. Por isso, devemos verificar se cada resultado faz sentido.

Exemplo 1.4

Isole cada uma das variáveis da equação $E = m \cdot c^2$.

Obviamente que dada a equação, já temos a variável (E) isolada. Assim, nos falta isolar (m) e (c). Isolando (m), temos

$$E = m \cdot c^2$$

$$\frac{E}{c^2} = m$$

Lembre que numa igualdade podemos simplesmente inverter os lados, ou seja, se $6 = \text{meia dúzia}$, então $\text{meia dúzia} = 6$. Assim,

$$m = \frac{E}{c^2}$$

Isolando (c), temos

$$E = m \cdot c^2$$

$$\frac{E}{m} = c^2$$

$$\sqrt{\frac{E}{m}} = \sqrt{c^2}$$

$$\sqrt{\frac{E}{m}} = c$$

$$c = \sqrt{\frac{E}{m}}$$

Neste caso usamos o valor positivo porque c representa a rapidez da luz, e uma rapidez não assume valores negativos. O sinal negativo seria usado para indicar sentido quando trabalhamos com velocidade, o que não é o caso aqui.

Exemplo 1.5

Isole cada uma das variáveis da equação $K = \frac{m \cdot v^2}{2}$.

Nos falta isolar (m) e (v) . Isolando (m) , temos

$$\begin{aligned} K &= \frac{m \cdot v^2}{2} \\ K \cdot 2 &= m \cdot v^2 \\ 2 \cdot K &= m \cdot v^2 \\ \frac{2 \cdot K}{v^2} &= m \end{aligned}$$

$$\boxed{m = \frac{2 \cdot K}{v^2}}$$

Isolando (v) , temos

$$\begin{aligned} K &= \frac{m \cdot v^2}{2} \\ K \cdot 2 &= m \cdot v^2 \\ 2 \cdot K &= m \cdot v^2 \\ \frac{2 \cdot K}{m} &= v^2 \\ \sqrt{\frac{2 \cdot K}{m}} &= \sqrt{v^2} \\ \sqrt{\frac{2 \cdot K}{m}} &= v \end{aligned}$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2 \cdot K}{m}}}$$

Matematicamente, uma equação com v^2 pode admitir valores positivo e negativo de v . Aqui estamos interessados na rapidez do corpo e, por isso, utilizamos o valor positivo.

1.4 Sistemas simples

Existem casos em que, numa dada equação, duas ou mais variáveis não são conhecidas. Em geral, para determinar duas incógnitas precisamos de duas equações

diferentes e independentes envolvendo essas incógnitas. Para três incógnitas, normalmente precisamos de três equações desse tipo. Também é necessário que as equações tragam informações realmente diferentes entre si. Geralmente, somente saber a equação correta a ser usada e isolar a variável buscada é o suficiente. Mas é importante saber solucionar problemas com um sistema de equações. Abaixo temos um exemplo de sistema com duas incógnitas desconhecidas (x e y) e duas equações, 1.5 e 1.6, envolvendo as mesmas:

$$x + y = 10 \quad (1.5)$$

$$2x + 4y = 28 \quad (1.6)$$

Na equação 1.5 desconhecemos os valores de (x) e (y) . Tendo somente esta equação, jamais conseguiríamos obter os valores de (x) e (y) . Mas conhecendo outra equação envolvendo estas mesmas variáveis associadas, por exemplo 1.6, poderíamos solucionar o sistema e descobrir os valores de cada grandeza.

Tendo que

$$2x + 4y = 28; \quad \text{isolando } x \quad \text{temos, } x = \frac{28 - 4y}{2}$$

usando o valor encontrado para (x) e substituindo esse valor na equação 1.5, temos

$$\underbrace{\frac{28 - 4y}{2}}_{=x} + y = 10$$

Note que agora temos somente (y) como incógnita. Podemos então resolver da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{28 - 4y}{2} + y &= 10 \\ \frac{28 - 4y}{2} &= 10 - y \\ 28 - 4y &= (10 - y) \times 2 \end{aligned}$$

$$28 - 4y = 20 - 2y$$

$$28 - 20 = -2y + 4y$$

$$8 = 2y$$

$$\frac{8}{2} = y$$

$$4 = y$$

ou

$$\boxed{y = 4}$$

Sabendo então o valor de ($y = 4$), podemos retornar na equação 1.5 e descobrir o valor de (x).

$$x + y = 10$$

$$x + 4 = 10$$

$$x = 10 - 4$$

$$\boxed{x = 6}$$

Se o problema tiver três incógnitas e três equações, como por exemplo

$$x + y + z = 6 \tag{1.7}$$

$$3x + 4y + \frac{z}{3} = 12 \tag{1.8}$$

$$4x + \frac{y}{2} + 3z = 14 \tag{1.9}$$

Devemos seguir a mesma lógica usada para resolver o sistema com duas equações, mas com alguns passos a mais. Primeiramente iremos isolar uma das incógnitas em uma das equações e teremos então esta incógnita em função de outras duas. Por exemplo, isolando (x) em 1.7, temos

$$x + y + z = 6$$

$$x = 6 - y - z$$

Agora substituindo este valor de (x) na equação 1.8

$$3x + 4y + \frac{z}{3} = 12$$

$$3(6 - y - z) + 4y + \frac{z}{3} = 12$$

$$18 - 3y - 3z + 4y + \frac{z}{3} = 12$$

$$-3y + 4y + \frac{z}{3} - 3z = 12 - 18$$

$$y + \frac{z}{3} - 3z = -6$$

$$y + \frac{z - 9z}{3} = -6$$

$$y - \frac{8z}{3} = -6$$

$$y = -6 + \frac{8z}{3}$$

Encontramos então a incógnita (y) em função da incógnita (z). Para conseguir concluir este sistema, usamos o valor encontrado para (x) na última equação, 1.9, e obtemos

$$4x + \frac{y}{2} + 3z = 14$$

$$4(6 - y - z) + \frac{y}{2} + 3z = 14$$

$$24 - 4y - 4z + \frac{y}{2} + 3z = 14$$

$$-4y - 4z + \frac{y}{2} + 3z = 14 - 24$$

$$-4z + 3z + \frac{y}{2} - 4y = -10$$

$$-z + \frac{y}{2} - 4y = -10$$

$$-z + \frac{y - 8y}{2} = -10$$

$$-z - \frac{7y}{2} = -10$$

$$-z = -10 + \frac{7y}{2}$$

$$z = 10 - \frac{7y}{2}$$

E finalmente usamos o valor de (y) em

$$z = 10 - \frac{7y}{2}$$

ficando

$$z = 10 - \frac{7 \left(-6 + \frac{8z}{3} \right)}{2}$$

$$\begin{aligned}
 z &= 10 - \frac{(-42 + \frac{56z}{3})}{2} \\
 z &= 10 + \frac{42}{2} - \frac{56z}{6} \\
 z + \frac{56z}{6} &= 10 + \frac{42}{2} \\
 z + \frac{56z}{6} &= 10 + 21 \\
 \frac{6z + 56z}{6} &= 31 \\
 \frac{62z}{6} &= 31 \\
 62z &= 31 \times 6 \\
 62z &= 186 \\
 z &= \frac{186}{62} \\
 \boxed{z = 3}
 \end{aligned}$$

Substituindo o valor encontrado para (z) na expressão de (y) , temos

$$\begin{aligned}
 y &= -6 + \frac{8z}{3} \\
 y &= -6 + \frac{8 \times 3}{3} \\
 y &= -6 + \frac{24}{3} \\
 y &= -6 + 8 \\
 \boxed{y = 2}
 \end{aligned}$$

E para encontrar (x) basta usar os valores encontrados para (y) e (z) .

$$\begin{aligned}
 x &= 6 - 2 - 3 \\
 \boxed{x = 1}
 \end{aligned}$$

O uso de sistemas de equações nos é amplamente necessário nos estudos que virão a seguir. Em algumas situações a aplicação desta técnica é a única alternativa para solucionar um problema. É um conhecimento básico que deve ser dominado por todo estudante de nível médio.

Exemplo 1.6

Resolva o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 3 & (1.10) \\ -4x + 10y &= -22 & (1.11) \end{aligned}$$

Isolando (x) na equação 1.10, temos

$$2x + 3y = 3$$

$$2x = 3 - 3y$$

$$x = \frac{3 - 3y}{2}$$

Usando que $x = \frac{3-3y}{2}$ em 1.11, temos

$$-4x + 10y = -22$$

$$-4 \cdot \frac{3 - 3y}{2} + 10y = -22$$

$$-\frac{4}{2}(3 - 3y) + 10y = -22$$

$$-2(3 - 3y) + 10y = -22$$

$$-6 + 6y + 10y = -22$$

$$16y = -22 + 6$$

$$16y = -16$$

$$y = -\frac{16}{16}$$

$$y = -1$$

Usando o valor de (y) podemos descobrir o valor de (x)

$$x = \frac{3 - 3y}{2}$$

$$x = \frac{3 - 3(-1)}{2}$$

$$x = \frac{3 + 3}{2}$$

$$x = \frac{6}{2}$$

$$x = 3$$

Logo, como solução temos

$$\boxed{x = 3} \text{ e } \boxed{y = -1}$$

Exemplo 1.7

Resolva o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 10 & (1.12) \\ 3x + 2y - 3z &= 35 & (1.13) \\ 2x + y + \frac{z}{2} &= 16 & (1.14) \end{aligned}$$

Isolando (x) em 1.12, temos

$$\begin{aligned} x + y + z &= 10 \\ x &= 10 - y - z \end{aligned}$$

Usando que $x = 10 - y - z$ em 1.13, temos

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 3z &= 35 \\ 3(10 - y - z) + 2y - 3z &= 35 \\ 30 - 3y - 3z + 2y - 3z &= 35 \\ -3y + 2y - 3z - 3z &= 35 - 30 \\ -y - 6z &= 5 \\ -y &= 5 + 6z \\ y &= -5 - 6z \end{aligned}$$

Usando que $y = -5 - 6z$ em $x = 10 - y - z$, temos

$$\begin{aligned} x &= 10 - (-5 - 6z) - z \\ x &= 10 + 5 + 6z - z \\ x &= 15 + 5z \end{aligned}$$

Usando agora que $x = 15 + 5z$ e que $y = -5 - 6z$ em 1.14, temos

$$\begin{aligned} 2x + y + \frac{z}{2} &= 16 \\ 2(15 + 5z) + (-5 - 6z) + \frac{z}{2} &= 16 \\ 30 + 10z - 5 - 6z + \frac{z}{2} &= 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10z - 6z + \frac{z}{2} &= 16 - 30 + 5 \\ 4z + \frac{z}{2} &= -9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{8z + z}{2} &= -9 \\ \frac{9z}{2} &= -9 \\ z &= -\frac{9 \cdot 2}{9} \\ z &= -\frac{18}{9} \\ z &= -2\end{aligned}$$

Sabendo agora o valor de ($z = -2$), podemos, usando que $y = -5 - 6z$, descobrir (y). Assim

$$\begin{aligned}y &= -5 - 6z \\ y &= -5 - 6(-2) \\ y &= -5 + 12 \\ y &= 7\end{aligned}$$

Por fim, substituindo ($y = 7$) e ($z = -2$) em $x = 10 - y - z$, temos

$$\begin{aligned}x &= 10 - y - z \\ x &= 10 - 7 - (-2) \\ x &= 10 - 7 + 2 \\ x &= 5\end{aligned}$$

Logo, como solução temos

$$x = 5$$

$$y = 7$$

e

$$z = -2$$

Síntese do capítulo

Uma **equação** apresenta duas expressões ligadas pelo sinal de igualdade. Resolvê-la é encontrar os valores que fazem os dois lados terem o mesmo resultado. Ao usar potências e raízes, conferimos as respostas na equação original. Quando há mais de uma incógnita, em geral precisamos de uma equação independente para cada uma e podemos usar a substituição.

Lista de exercícios 1

1. Dadas as seguintes equações, isole cada uma de suas variáveis:

a- $\Delta S = S - S_0$

b- $\Delta v = v - v_0$

c- $\Delta t = t - t_0$

d- $v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$

e- $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

f- $v = \frac{S-S_0}{t}$

g- $a = \frac{v-v_0}{t}$

h- $v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta S$

i- $a_c = \frac{v^2}{R}$

j- $v = \omega \cdot R$

2. Resolva os seguintes sistemas de equações:

a-

$$x + 3y = 10$$

$$2x + 5y = 18$$

b-

$$x + 3y = 10$$

$$2x + 5y = 17$$

c-

$$x + y + z = 4$$

$$2x - 4y - 3z = -6$$

$$\frac{x}{2} + 3y + 8z = -3$$



Razões, Proporções e Regra de Três

O que você vai aprender

- Entender o que é uma razão e o que é uma proporção.
- Diferenciar grandezas direta e inversamente proporcionais.
- Resolver problemas com regra de três simples.
- Trabalhar com porcentagem e com escalas.

Por que estudamos isto? Comparar grandezas é a base de boa parte da física: converter unidades, relacionar distância e tempo, massa e volume, ou usar escalas em mapas e plantas. Por isso começamos por razões, proporções e regra de três, que voltarão a aparecer em quase todo cálculo daqui para frente.

2.1 Razão e proporção

Antes de entrarmos de fato na física, precisamos dominar uma ferramenta que usaremos o tempo todo daqui para frente: a comparação entre grandezas. Boa parte do que faremos em cinemática, em dinâmica ou em eletricidade nada mais é do que comparar uma grandeza com outra e tirar conclusões dessa comparação. E a forma mais básica de comparar duas grandezas é através de uma razão.

Uma **razão** entre dois números (a) e (b), com (b) diferente de zero, é simplesmente o quociente entre eles, ou seja, a divisão de um pelo outro. Escrevemos

$$\text{razão} = \frac{a}{b}.$$

Note que a razão é uma divisão, mas com um sentido de comparação. Quando dizemos que a razão entre dois valores é 2, estamos dizendo que o primeiro é duas vezes o segundo. Por exemplo, se em uma sala temos 20 meninas e 10 meninos, a razão entre o número de meninas e o número de meninos é

$$\frac{20}{10} = 2,$$

o que significa que há duas meninas para cada menino. Como estamos comparando quantidades da mesma natureza, a razão não possui unidade e passa a nos informar apenas quantas vezes uma quantidade cabe na outra. Em outros casos, uma razão pode ter uma unidade própria, como ocorre com a velocidade medida em km/h.

Uma **proporção**, por sua vez, é a igualdade entre duas razões. Dito isto, temos que quatro números formam uma proporção quando

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Essa igualdade tem uma propriedade que usaremos com muita frequência, conhecida como a propriedade fundamental das proporções: o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. Em outras palavras,

PROPRIEDADE FUNDAMENTAL DAS PROPORÇÕES

$$a \cdot d = b \cdot c$$

(2.1)

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$a, d \rightarrow$ os extremos da proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
 $b, c \rightarrow$ os meios da proporção

É justamente essa propriedade, a de “multiplicar cruzado”, que está por trás da regra de três que veremos mais adiante. Devemos ter claro que resolver uma proporção é, na prática, isolar a variável desconhecida usando exatamente as operações que estudamos no capítulo anterior.

Exemplo 2.1

Em um mapa, a razão entre a distância desenhada e a distância real é sempre a mesma. Se 2 cm no mapa representam 50 km reais, quantos quilômetros representam 5 cm?

Como a razão é constante, montamos a proporção

$$\frac{2}{50} = \frac{5}{x}.$$

Aplicando a propriedade fundamental (produto dos extremos igual ao produto dos meios),

$$2 \cdot x = 50 \cdot 5$$

$$2x = 250$$

$$x = \frac{250}{2}$$

$$x = 125.$$

Temos então que 5 cm no mapa representam 125 km reais.

Exemplo 2.2

Em uma receita, a razão entre farinha e açúcar é de 3 para 2. Se foram usadas 9 xícaras de farinha, quantas xícaras de açúcar entraram na receita?

A razão entre farinha e açúcar deve permanecer $\frac{3}{2}$. Montamos a proporção com a quantidade de açúcar (x):

$$\frac{3}{2} = \frac{9}{x}.$$

Multiplicando cruzado,

$$3 \cdot x = 2 \cdot 9$$

$$3x = 18$$

$$x = 6.$$

Foram usadas 6 xícaras de açúcar.

Exemplo 2.3

Resolva a proporção, encontrando o valor de (x):

$$\frac{x}{5} = \frac{12}{4}.$$

Multiplicando cruzado (produto dos extremos igual ao produto dos meios),

$$4 \cdot x = 5 \cdot 12$$

$$4x = 60$$

$$x = \frac{60}{4}$$

$$x = 15.$$

2.2 Grandezas direta e inversamente proporcionais

Nem toda comparação entre grandezas se comporta da mesma forma, e é importante perceber essa diferença antes de aplicar qualquer técnica. Duas grandezas podem estar relacionadas de dois modos: de forma direta ou de forma inversa.

Dizemos que duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando, ao aumentarmos uma delas, a outra aumenta na mesma proporção; e ao diminuirmos uma, a outra diminui na mesma proporção. Por exemplo, se um quilograma de um produto custa determinado valor, dois quilogramas custarão o dobro, três quilogramas o triplo, e assim por diante. Note que aqui a razão entre as duas grandezas se mantém constante.

Em grandezas diretamente proporcionais, a razão entre elas é constante: se uma dobra, a outra dobra.

Já dizemos que duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando, ao aumentarmos uma delas, a outra diminui na mesma proporção. O exemplo mais corriqueiro é o da velocidade e do tempo de viagem: quanto maior a velocidade com que percorremos um trajeto, menor o tempo gasto nele. Se dobramos a velocidade, o tempo cai pela metade. Em raciocínio oposto ao caso anterior, aqui não é a razão que se mantém constante, e sim o produto das duas grandezas.

Em grandezas inversamente proporcionais, o produto entre elas é constante: se uma dobra, a outra cai pela metade.

Saber distinguir esses dois casos é fundamental, pois é isso que determina como montaremos a regra de três a seguir. Um erro muito comum é tratar como direta uma relação que é inversa, e por isso devemos sempre pensar antes: se uma grandeza aumenta, o que acontece com a outra?

Exemplo 2.4

Classifique cada par de grandezas como diretamente ou inversamente proporcional:

- a) número de operários e tempo para terminar uma obra;
- b) quantidade de combustível e distância percorrida por um carro;
- c) velocidade de um carro e tempo gasto em um trajeto fixo.

Em cada caso perguntamos: se uma aumenta, o que acontece com a outra? No caso dos operários, consideramos que todos trabalham nas mesmas condições e com a mesma produtividade.

- a) mais operários, menos tempo: **inversamente** proporcionais;
- b) mais combustível, mais distância: **diretamente** proporcionais;
- c) mais velocidade, menos tempo: **inversamente** proporcionais.

Exemplo 2.5

Um carro mantém velocidade constante e percorre 30 km com 2 litros de combustível. Verifique se distância e combustível são diretamente proporcionais e diga quanto ele percorreria com 5 litros.

Considerando que o consumo por quilômetro permanece o mesmo nas mesmas condições, pensemos com calma: se colocarmos mais combustível, o carro anda mais; se colocarmos menos, anda menos. Como as duas grandezas crescem juntas, elas são **diretamente** proporcionais. Isso quer dizer que a razão

entre distância e combustível se mantém constante. Com os dados iniciais, essa razão é

$$\frac{30}{2} = 15 \quad (\text{ou seja, 15 km por litro}).$$

Para achar a distância com 5 litros, mantemos a mesma razão:

$$\frac{30}{2} = \frac{d}{5}.$$

Multiplicando cruzado, $2 \cdot d = 30 \cdot 5$, logo $d = \frac{150}{2} = 75$. O carro percorreria 75 km.

Exemplo 2.6

Trabalhando no mesmo ritmo, 4 pedreiros levantam um muro em 15 dias. Mantido esse ritmo, quantos dias levariam 6 pedreiros para levantar o mesmo muro?

Pensemos com calma: aumentando o número de pedreiros, o tempo para terminar o muro diminui. Como uma grandeza cresce enquanto a outra decresce, elas são **inversamente** proporcionais. Nesse caso, o que se mantém constante é o *produto* entre elas. Com os dados iniciais, esse produto vale

$$4 \cdot 15 = 60.$$

Para 6 pedreiros, chamamos de d o número de dias e mantemos o mesmo produto:

$$6 \cdot d = 60.$$

Isolando, $d = \frac{60}{6} = 10$. Os 6 pedreiros levantariam o muro em 10 dias.

2.3 Regra de três simples

A **regra de três** é o método prático que usamos para descobrir um valor desconhecido em uma proporção, quando conhecemos os outros três valores. Daí, aliás, vem o seu nome: conhecemos três valores e buscamos o quarto. É uma das ferramentas mais empregadas em toda a física básica, e por isso merece atenção.

A regra de três que usaremos envolve sempre **duas grandezas**, uma delas com o valor desconhecido. É o caso que aparece o tempo todo na física básica.

Para resolver uma regra de três simples, organizamos as grandezas em duas colunas, colocando na mesma linha os valores que se correspondem. Em seguida,

verificamos se as grandezas são direta ou inversamente proporcionais. Se forem diretamente proporcionais, montamos a proporção mantendo as duas frações no mesmo sentido; se forem inversamente proporcionais, precisamos inverter uma das frações antes de igualar. Feito isso, basta multiplicar cruzado e isolar a incógnita.

Exemplo 2.7

Se 3 kg de um alimento custam R\$ 24,00, quanto custarão 7 kg do mesmo alimento?

As grandezas massa e preço são diretamente proporcionais (mais massa, mais preço). Montamos, então, na mesma ordem:

$$\frac{3}{7} = \frac{24}{x}.$$

Multiplicando cruzado,

$$3 \cdot x = 7 \cdot 24$$

$$3x = 168$$

$$x = \frac{168}{3}$$

$$x = 56.$$

Temos então que 7 kg custarão R\$ 56,00.

Exemplo 2.8

Um carro percorre um trajeto em 4 h a uma velocidade de 60 km/h. Quanto tempo levaria para percorrer o mesmo trajeto a 80 km/h?

Aqui as grandezas velocidade e tempo são inversamente proporcionais (mais velocidade, menos tempo). Por isso, devemos inverter uma das frações antes de igualar. Escrevendo a velocidade em uma coluna e o tempo em outra, e invertendo a razão das velocidades, temos

$$\frac{80}{60} = \frac{4}{x}.$$

Multiplicando cruzado,

$$80 \cdot x = 60 \cdot 4$$

$$80x = 240$$

$$x = \frac{240}{80}$$
$$x = 3.$$

Temos então que, a 80 km/h, o trajeto seria percorrido em 3 h.

Exemplo 2.9

Se 4 pedreiros constroem um muro em 6 dias, em quantos dias 3 pedreiros construiriam o mesmo muro, trabalhando no mesmo ritmo?

Aqui temos apenas **duas** grandezas, número de pedreiros e número de dias, então é uma regra de três simples. Quanto menos pedreiros, mais dias serão necessários, de modo que elas são inversamente proporcionais. Colocando a incógnita na coluna dos dias e invertendo a razão dos pedreiros, temos

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{x}.$$

Multiplicando cruzado,

$$3 \cdot x = 4 \cdot 6$$

$$3x = 24$$

$$x = 8.$$

Temos então que 3 pedreiros levariam 8 dias para construir o mesmo muro.

2.4 Porcentagem

A **porcentagem** é apenas um caso particular de razão, em que comparamos uma quantidade com o total tomando como referência o número 100. Quando dizemos que algo corresponde a 30%, estamos dizendo que, de cada 100 partes do todo, estamos considerando 30. Assim, toda porcentagem pode ser escrita como uma fração de denominador 100, ou como o número decimal correspondente:

$$30\% = \frac{30}{100} = 0,30.$$

Para calcular uma porcentagem de um valor, basta multiplicar esse valor pela fração correspondente. É uma conta simples, mas que aparece o tempo todo, tanto em situações do cotidiano quanto em problemas de física, e por isso deve estar bem dominada.

Exemplo 2.10

Uma mercadoria que custava R\$ 200,00 recebeu um desconto de 15%. Qual o novo preço?

Primeiro calculamos quanto vale o desconto:

$$15\% \text{ de } 200 = \frac{15}{100} \cdot 200 = 0,15 \cdot 200 = 30.$$

O desconto é de R\$ 30,00. Subtraindo do valor original,

$$200 - 30 = 170.$$

Temos então que o novo preço é R\$ 170,00.

Exemplo 2.11

Uma bicicleta que custava R\$ 400,00 teve um aumento de 12%. Qual o novo preço?

Calculamos primeiro o valor do aumento:

$$12\% \text{ de } 400 = 0,12 \cdot 400 = 48.$$

O aumento é de R\$ 48,00. Somando ao valor original,

$$400 + 48 = 448.$$

O novo preço é R\$ 448,00.

Exemplo 2.12

Em uma prova de 40 questões, um aluno acertou 30. Qual foi a sua porcentagem de acertos?

A porcentagem é a razão entre o que se obteve e o total, multiplicada por 100:

$$\frac{30}{40} = 0,75 = 75\%.$$

O aluno acertou 75% da prova.

2.5 Escalas

Para fechar este capítulo, vamos tratar de uma aplicação direta de tudo o que vimos: as escalas. Uma **escala** é a razão entre uma medida representada (em um mapa, uma planta ou um desenho) e a medida real correspondente. Trata-se, portanto, de uma proporção entre o desenho e a realidade, e por isso a resolvemos exatamente como as proporções anteriores.

Quando dizemos que um mapa está na escala 1 : 100.000, estamos dizendo que cada unidade de comprimento no mapa corresponde a 100.000 unidades reais. Assim, 1 cm no papel representa 100.000 cm na realidade, o que equivale a 1 km. Note que a escala não tem unidade, pois é uma razão entre grandezas de mesma natureza, sempre tomadas na mesma unidade antes da comparação.

Exemplo 2.13

Em uma planta na escala 1 : 50, uma parede aparece com 8 cm de comprimento. Qual o comprimento real da parede?

A escala 1 : 50 nos diz que cada 1 cm na planta corresponde a 50 cm reais. Montamos a proporção

$$\frac{1}{50} = \frac{8}{x}.$$

Multiplicando cruzado,

$$\begin{aligned}1 \cdot x &= 50 \cdot 8 \\ x &= 400.\end{aligned}$$

Temos então que a parede tem 400 cm reais, ou seja, 4 m.

Exemplo 2.14

Uma sala tem 6 m de comprimento real e será desenhada em uma planta na escala 1 : 50. Com quantos centímetros ela deve aparecer no desenho?

Aqui conhecemos a medida real e queremos a do desenho. Antes de comparar, passamos tudo para a mesma unidade: 6 m = 600 cm. A escala 1 : 50 diz que cada 1 cm no desenho vale 50 cm reais. Montamos a proporção com o comprimento no desenho (x):

$$\frac{1}{50} = \frac{x}{600}.$$

Multiplicando cruzado,

$$50 \cdot x = 1 \cdot 600$$

$$x = \frac{600}{50}$$

$$x = 12.$$

A sala deve aparecer com 12 cm na planta.

Exemplo 2.15

No mapa de uma região, duas cidades aparecem separadas por 8 cm. Sabendo que a distância real entre elas é de 40 km, qual é a escala do mapa?

A escala é a razão entre a medida no mapa e a medida real, ambas na mesma unidade. Passamos a distância real para centímetros:

$$40 \text{ km} = 40.000 \text{ m} = 4.000.000 \text{ cm}.$$

A escala é então

$$\frac{8}{4.000.000} = \frac{1}{500.000},$$

ou seja, 1 : 500.000. Cada 1 cm no mapa representa 500.000 cm reais, isto é, 5 km.

Síntese do capítulo

Comparar grandezas é a base de quase tudo o que faremos na física. Uma razão é o quociente entre duas grandezas, e uma proporção é a igualdade entre duas razões, cuja propriedade fundamental (produto dos extremos igual ao produto dos meios) nos permite multiplicar cruzado. Duas grandezas podem ser diretamente proporcionais (a razão entre elas é constante) ou inversamente proporcionais (o produto entre elas é constante), e distinguir os dois casos é o que garante que a regra de três seja montada corretamente. A porcentagem e a escala são apenas casos particulares de razão, e por isso são resolvidas com essas mesmas ferramentas.

Lista de exercícios 2

1. Calcule a razão entre os valores dados:
 - a- 15 para 5.
 - b- 40 para 8.
 - c- 9 para 12.
2. Resolva as proporções, encontrando o valor de (x) :
 - a- $\frac{x}{6} = \frac{10}{3}$
 - b- $\frac{4}{x} = \frac{8}{14}$
 - c- $\frac{x}{9} = \frac{2}{3}$
3. Classifique cada par de grandezas como direta ou inversamente proporcional:
 - a- número de torneiras abertas e tempo para encher um tanque, considerando torneiras iguais e com a mesma vazão;
 - b- número de pães e preço total pago.
4. Se 5 kg de laranjas custam R\$ 20,00, quanto custarão 8 kg?
5. Um trajeto é percorrido em 6 h a 50 km/h. Mantendo o mesmo trajeto, quanto tempo levaria a 75 km/h?
6. Se 6 operários fazem um serviço em 10 dias, trabalhando com a mesma produtividade, em quantos dias 4 operários fariam o mesmo serviço?
7. Calcule:
 - a- 20% de 150.
 - b- 8% de 250.
8. Um produto de R\$ 80,00 sofreu aumento de 25%. Qual o novo preço?
9. Em uma prova de 50 questões, um aluno acertou 35. Qual a sua porcentagem de acertos?
10. Em um mapa na escala 1 : 200.000, dois pontos estão a 6 cm um do outro. Qual a distância real entre eles, em quilômetros?
11. Uma estrada de 9 km será representada em um mapa na escala 1 : 300.000. Com quantos centímetros ela aparecerá no mapa?



Notação Científica e Ordem de Grandeza

Exemplo 3.1

- a) $35 = 3,5 \times 10^1$, sendo $10^1 = 10$, temos $3,5 \times 10 = 35$
 b) $430 = 4,3 \times 10^2$, sendo $10^2 = 100$, temos $4,3 \times 100 = 430$
 c) $5000 = 5 \times 10^3$, sendo $10^3 = 1000$, temos $5 \times 1000 = 5000$
 d) $4.580.000 = 4,58 \times 10^6$, sendo $10^6 = 1.000.000$, temos $4,58 \times 1.000.000 = 4.580.000$
 e) $123.456.700.000 = 1,234567 \times 10^{11}$, sendo $10^{11} = 100.000.000.000$, temos $1,234567 \times 100.000.000.000 = 123.456.700.000$

Exemplo 3.2

Escreva o número 0,00045 em notação científica.

Para escrever um número em notação científica, precisamos deixar apenas um algarismo entre 1 e 9 antes da vírgula. No número 0,00045 vamos “andar” com a vírgula para a direita até chegar logo após o 4:

$$0,00045 \longrightarrow 4,5$$

A vírgula andou 4 casas para a direita. Como ela foi para a direita, o expoente da base 10 fica **negativo**. Logo,

$$0,00045 = 4,5 \times 10^{-4}$$

Conferindo: $4,5 \times 10^{-4} = 4,5 \times 0,0001 = 0,00045$.

Podemos ver que qualquer valor pode ser expresso em base 10, porém o uso desta descrição não traz vantagem para números que já são curtos, como nos exemplos **a**, **b**, **c**.

É útil notar que há mais de uma forma de designar o mesmo valor em base 10, por exemplo:

$$\begin{aligned} 5000 &= \mathbf{5000} \times 10^0 = 5000 \times 1 = 5000 \\ 5000 &= \mathbf{500} \times 10^1 = 500 \times 10 = 5000 \\ 5000 &= \mathbf{50} \times 10^2 = 50 \times 100 = 5000 \\ 5000 &= \mathbf{5} \times 10^3 = 5 \times 1000 = 5000 \\ 5000 &= \mathbf{0,5} \times 10^4 = 0,5 \times 10.000 = 5000 \\ 5000 &= \mathbf{0,05} \times 10^5 = 0,05 \times 100.000 = 5000 \end{aligned}$$

Em todos os exemplos acima, o valor 5000 está representado em base 10. Um mesmo valor pode ser escrito de mais de uma forma, com mantissas e expoentes

adequados, sem deixar de representar o mesmo número. Essa ideia é necessária para o trabalho em base 10. Adiante, aprenderemos uma forma mais curta, chamada **NOTAÇÃO CIENTÍFICA**.

Neste momento iremos analisar os valores em base 10 com **expoentes negativos**. Para isso, um conhecimento básico se faz necessário. Sempre que um número é descrito por um expoente negativo, o mesmo **encontra-se no denominador** elevado ao mesmo expoente positivo, ou seja:

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$$

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10.000} = 0,0001$$

Desta forma, **quanto maior o valor** (em módulo) do expoente **NEGATIVO**, **menor a grandeza** do número que queremos descrever.

Exemplo 3.3

a) $0,5 = 5 \times 10^{-1}$, sendo

$$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = \frac{1}{10} = 0,1,$$

temos $5 \times 0,1 = 0,5$.

b) $0,002 = 2 \times 10^{-3}$, sendo

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001,$$

temos $2 \times 0,001 = 0,002$.

c) $0,00043 = 4,3 \times 10^{-4}$, sendo

$$10^{-4} = \frac{1}{10^4} = \frac{1}{10.000} = 0,0001,$$

temos $4,3 \times 0,0001 = 0,00043$.

d) $0,0000073 = 7,3 \times 10^{-6}$, sendo

$$10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1.000.000} = 0,000001,$$

temos $7,3 \times 0,000001 = 0,0000073$.

e) $0,00000000012345 = 1,2345 \times 10^{-10}$, sendo

$$10^{-10} = \frac{1}{10^{10}} = \frac{1}{10.000.000.000} = 0,0000000001,$$

temos $1,2345 \times 0,0000000001 = 0,00000000012345$.

Acima vimos que um mesmo valor pode ser expresso de mais de uma forma com expoentes positivos. Essa situação também vale para os expoentes negativos.

Vejamos:

$$200 = 20.000 \times 10^{-2} = 20.000 \times \frac{1}{10^2} = 20.000 \times \frac{1}{100} = 20.000 \times 0,01 = 200$$

$$200 = 2000 \times 10^{-1} = 2000 \times \frac{1}{10^1} = 2000 \times \frac{1}{10} = 2000 \times 0,1 = 200$$

$$200 = 200 \times 10^0 = 200 \times 1 = 200$$

$$200 = 20 \times 10^1 = 20 \times 10 = 200$$

$$200 = 2 \times 10^2 = 2 \times 100 = 200$$

$$200 = 0,2 \times 10^3 = 0,2 \times 1000 = 200$$

$$200 = 0,02 \times 10^4 = 0,02 \times 10.000 = 200$$

Embora possamos representar o número 200 em base 10 usando diferentes expoentes, nem todas essas formas tornam sua escrita mais simples. O mais útil é escolher a forma que realmente encurta números muito grandes ou muito pequenos e facilita os cálculos.

Mesmo quando a vírgula não aparece, como no número 200, podemos imaginar que ela está no final: $200 = 200,0$. Isso não altera o valor do número. Mais adiante veremos que zeros escritos depois da vírgula também podem informar a precisão de uma medida. Por enquanto, usaremos essa ideia apenas para compreender o deslocamento da vírgula. Dito isso, existe uma regra simples para mudar sua posição usando expoentes em base 10:

Se a vírgula “pular” para a esquerda, **ADICIONAMOS UMA UNIDADE (+1)** no expoente.

Se a vírgula “pular” para a direita, **SUBTRAÍMOS UMA UNIDADE (-1)** no expoente.

Para a esquerda:

$$\begin{aligned}
 200.000 \times 10^{-3} &= 200 \\
 20.000,0 \times 10^{-3+1} &= 20.000 \times 10^{-2} = 200 \\
 2000,00 \times 10^{-3+1+1} &= 2000 \times 10^{-1} = 200 \\
 200,000 \times 10^{-3+1+1+1} &= 200 \times 10^0 = 200 \\
 20,0000 \times 10^{-3+1+1+1+1} &= 20 \times 10^1 = 200 \\
 2,00000 \times 10^{-3+1+1+1+1+1} &= 2 \times 10^2 = 200
 \end{aligned}$$

Para a direita:

$$\begin{aligned}
 0,002 \times 10^5 &= 200 \\
 0,02 \times 10^{5-1} &= 0,02 \times 10^4 = 200 \\
 0,2 \times 10^{5-1-1} &= 0,2 \times 10^3 = 200 \\
 2 \times 10^{5-1-1-1} &= 2 \times 10^2 = 200 \\
 20 \times 10^{5-1-1-1-1} &= 20 \times 10^1 = 200 \\
 200 \times 10^{5-1-1-1-1-1} &= 200 \times 10^0 = 200 \\
 2000 \times 10^{5-1-1-1-1-1-1} &= 2000 \times 10^{-1} = 200 \\
 20.000 \times 10^{5-1-1-1-1-1-1-1} &= 20.000 \times 10^{-2} = 200 \\
 200.000 \times 10^{5-1-1-1-1-1-1-1-1} &= 200.000 \times 10^{-3} = 200
 \end{aligned}$$

Observe o que aconteceu com o número 200. Deslocamos a vírgula até deixar apenas o algarismo 2 antes dela. Como a vírgula andou duas casas para a esquerda, usamos 10^2 para conservar o valor: $200 = 2 \times 10^2$. Essa forma de escrever é a **notação científica**. O mesmo processo pode ser usado com números positivos ou negativos; nos negativos, mantemos o sinal.

Exemplo 3.4

- a) $3000 = 3 \times 10^3$
- b) $2600 = 2,6 \times 10^3$
- c) $356.000 = 3,56 \times 10^5$
- d) $1.230.000.000 = 1,23 \times 10^9$
- e) $0,06 = 6 \times 10^{-2}$
- f) $0,00234 = 2,34 \times 10^{-3}$
- g) $0,000005678 = 5,678 \times 10^{-6}$
- h) $0,000000000002380089 = 2,380089 \times 10^{-12}$

Nos exemplos **c** e **f**, poderíamos colocar a vírgula em outras posições e compensar a mudança com outra potência de dez. O valor seria o mesmo, mas não te-

riamos a forma de notação científica adotada no livro, pois não haveria algarismo diferente de zero antes da vírgula ou haveria mais de um. Na notação científica, colocamos a vírgula logo depois do primeiro algarismo diferente de zero.

Observe os exemplos: primeiro localizamos o primeiro algarismo diferente de zero e colocamos a vírgula depois dele. Em seguida, usamos a potência de dez para compensar o deslocamento da vírgula. Por isso, 356.000 se torna $3,56 \times 10^5$ e 0,00234 se torna $2,34 \times 10^{-3}$, estando agora os valores em **base 10** e em **notação científica**.

3.1 Ordem de Grandeza

Muitas vezes não precisamos do valor exato de uma grandeza, mas apenas de uma ideia do seu tamanho: se ela é da casa das dezenas, das centenas, dos milhares, e assim por diante. É isso que a **ordem de grandeza** responde. Ela é a potência de dez mais próxima do número. Em outras palavras, ela responde a uma pergunta bem simples: o número está mais perto de 10? De 100? De 1000? De qual potência de dez?

Vamos com calma e com números. Lembre que as potências de dez são ..., 1, 10, 100, 1000, 10.000, ... Tudo o que queremos saber é de qual delas o nosso número está mais perto. Veja o número 120: ele está entre 100 e 1000 e, olhando, percebemos que está bem mais perto de 100. Dizemos então que a ordem de grandeza de 120 é 100, isto é, 10^2 . Agora veja o número 850: ele também está entre 100 e 1000, mas desta vez está mais perto de 1000. Logo, a ordem de grandeza de 850 é 1000, isto é, 10^3 .

Para não termos que ficar “olhando” toda vez, existe um roteiro simples, e ele usa a notação científica que acabamos de aprender. Primeiro escrevemos o número em notação científica (aquela com um único algarismo antes da vírgula). Como regra rápida, mantissas que começam com 1, 2 ou, na maioria dos casos, 3 ficam na potência inferior. Entretanto, o limite mais preciso é 3,16. Assim, olhando para a mantissa positiva a , decidimos:

- se $a < 3,16$, ficamos na potência inferior;
- se $a \geq 3,16$, passamos para a potência seguinte.

Vamos repetir com vários números, sempre olhando de qual potência de dez o número está mais perto. Veja o 200: ele está entre 100 e 1000, e claramente mais perto de 100; então a ordem de grandeza é 100, ou seja, 10^2 . O 8000 está entre 1000 e 10.000, e mais perto de 10.000; sua ordem de grandeza é 10.000, ou seja, 10^4 . O 300 está entre 100 e 1000, e mais perto de 100; ordem de grandeza 100, isto é, 10^2 . Já o 0,006 está entre 0,001 e 0,01, mais perto de 0,01; ordem de grandeza 0,01, ou seja, 10^{-2} .

Agora vem o ponto que costuma confundir, e vale a pena ir bem devagar. Peguemos o 350. Se você olhar pela distância comum, o 350 está mesmo mais perto de 100 (falta 250) do que de 1000 (falta 650). Então por que a ordem de grandeza dele é 1000, e não 100? A resposta é que, em ordem de grandeza, não comparamos por *quanto* falta, e sim por *quantas vezes*. E, contando em vezes, a história muda: para ir de 100 até 350 a gente multiplica por 3,5; mas para ir de 350 até 1000 a gente multiplica por menos, cerca de 2,9. Ou seja, em número de vezes, o 350 já está mais perto de 1000. Por isso sua ordem de grandeza é 1000, isto é, 10^3 .

É esse mesmo raciocínio que explica o número 3162. Ele é o “meio do caminho” entre 1000 e 10.000 não porque cai na metade da reta (não cai, ele está mais perto de 1000), mas porque está o mesmo número de vezes acima de 1000 e abaixo de 10.000: 3162 é cerca de 3,16 vezes 1000, e 10.000 é cerca de 3,16 vezes 3162. É o ponto de equilíbrio quando medimos por multiplicação. Guardamos então esse número 3,16: quando a mantissa começa com 3, ficamos na potência de baixo se ela for menor que 3,16 (como 3,05) e subimos para a de cima se for igual ou maior que 3,16 (como 3,5).

Guarde o roteiro, que é sempre o mesmo: escrevemos o número em notação científica, olhamos só para a mantissa e decidimos se ficamos na potência ou subimos uma. Lembre que a ordem de grandeza não é o valor exato do número, e sim a “faixa de tamanho” em que ele está. É justamente por isso que ela é tão útil na física: com ela dizemos rapidinho que um átomo é cerca de um bilhão de vezes menor do que uma bola de futebol, sem precisar carregar todos os algarismos.

Exemplo 3.5

Qual a ordem de grandeza da massa de um elétron, $9,1 \times 10^{-31}$ kg?

A mantissa 9,1 é maior que 3,16, então subimos uma potência: a ordem de grandeza é

$$10^{-30} \text{ kg}$$

Exemplo 3.6

Qual a ordem de grandeza de 2×10^{22} metros (distância entre a Via Láctea e Andrômeda)?

A mantissa 2 está entre 1 e 3, então ficamos na própria potência: a ordem de grandeza é

$$10^{22} \text{ m}$$

Exemplo 3.7

Qual a ordem de grandeza do número 3450?

Este número não está em notação científica, então esse é o primeiro passo:

$$3450 = 3,45 \times 10^3.$$

A mantissa 3,45 é maior que 3,16, logo o número já está mais perto da potência seguinte:

$$10^4$$

Repare que, numa reta comum, 3450 até parece mais perto de 1000 do que de 10.000; mas a ordem de grandeza compara por potências de dez, e nessa comparação 3450 já pertence à faixa de 10^4 .

Exemplo 3.8

Uma cidade tem cerca de 85.000 habitantes. Qual a ordem de grandeza desse número?

Escrevendo em notação científica,

$$85.000 = 8,5 \times 10^4.$$

A mantissa 8,5 é maior que 3,16, então subimos uma potência:

$$10^5 \text{ habitantes}$$

Exemplo 3.9

Um átomo tem diâmetro da ordem de 10^{-10} m e uma bola de futebol, da ordem de 10^{-1} m. Quantas ordens de grandeza separam os dois?

Basta subtrair os expoentes das ordens de grandeza:

$$(-1) - (-10) = 9.$$

São 9 ordens de grandeza de diferença, ou seja, a bola é cerca de 10^9 (um bilhão) de vezes maior que o átomo. Este é o tipo de comparação rápida que a ordem de grandeza nos permite fazer.

Exemplo 3.10

Qual a ordem de grandeza de 3500?

Em notação científica, $3500 = 3,5 \times 10^3$. Como a mantissa 3,5 é maior que 3,16, subimos uma potência:

$$10^4$$

Exemplo 3.11

Qual a ordem de grandeza de $3,05 \times 10^7$?

A mantissa 3,05 é menor que 3,16, então ficamos na própria potência:

$$10^7$$

Compare com o exemplo anterior: a diferença entre parar em 10^n ou subir para 10^{n+1} mora justamente na fronteira dos 3,16.

Exemplo 3.12

Qual a ordem de grandeza de 0,00072?

Primeiro escrevemos em notação científica: $0,00072 = 7,2 \times 10^{-4}$. Como a mantissa 7,2 é maior que 3,16, subimos uma potência:

$$10^{-3}$$

3.2 Algarismos Significativos

Na física, os cálculos geralmente são feitos com o uso de algumas aproximações. Por exemplo, se calcularmos a distância entre o Sol e a Terra, erros da ordem de centímetros são praticamente irrelevantes. Devido a isso, podemos aproximar os valores usados nos cálculos. Obviamente que **quanto maior a precisão necessária, menor é a aproximação possível**. Nos exemplos deste livro, quando não houver uma orientação específica, manteremos algumas casas durante os cálculos e arredondaremos apenas o resultado final. Em muitos casos, três algarismos significativos serão suficientes. Sendo assim, valores com muitos algarismos podem ser simplificados, e fazendo uso da notação científica, facilitamos muito os cálculos levando em conta somente alguns **algarismos significativos**.

Aqui cabe um esclarecimento importante, porque é um ponto em que muita

gente se confunde. **Algarismos significativos** são todos os algarismos confiáveis da mantissa, contando também o dígito que fica *antes* da vírgula, e não apenas os que ficam depois dela. Assim, $1,35 \times 10^6$ tem **três** algarismos significativos (o 1, o 3 e o 5), e não dois. Quando, então, arredondamos a mantissa para duas casas depois da vírgula, o que estamos fazendo é manter três algarismos significativos. Guarde essa distinção: casas decimais da mantissa e algarismos significativos não são a mesma coisa.

Os algarismos significativos contam todos os dígitos confiáveis da mantissa, inclusive o que vem antes da vírgula: $1,35 \times 10^6$ tem três algarismos significativos.

Algumas regras simples resolvem a maioria dos casos: zeros à esquerda não são significativos; zeros entre algarismos não nulos são significativos; e zeros finais após a vírgula são significativos. Assim, 0,0042 tem dois algarismos significativos, 4,02 tem três e 2,300 tem quatro. Já os zeros finais de números inteiros podem ser ambíguos, e a notação científica elimina essa dúvida: $1,50 \times 10^3$ tem três algarismos significativos.

Algumas regras são úteis para fazermos aproximações. Por exemplo, se vamos aproximar em duas casas após a vírgula (o que corresponde a três algarismos significativos, contando o dígito antes da vírgula), devemos olhar qual o valor do terceiro número após a vírgula. Se o primeiro algarismo descartado estiver entre **0** e **4**, mantemos os dois dígitos após a vírgula sem alteração. Por exemplo:

$$1.353.130 = 1,35313 \times 10^6, \text{ podemos aproximar para } 1,35 \times 10^6 = 1.350.000$$

Note que $1,35 \times 10^6 \neq 1,35313 \times 10^6$, porém se vamos aproximar para duas casas após a vírgula o valor $1,35 \times 10^6$ representa bem o número 1.353.130. Vemos que há um erro de $1.353.130 - 1.350.000 = 3130$, porém o valor **3130** é pouco representativo frente ao valor **1.353.130**.

Se o primeiro algarismo descartado for **5** ou maior, acrescentamos uma unidade no último algarismo mantido. Esta será a convenção utilizada em todo o livro. Por exemplo:

$$1.356.130 = 1,35613 \times 10^6, \text{ podemos aproximar para } 1,36 \times 10^6 = 1.360.000$$

Fazendo esta aproximação teremos um erro de $1.356.130 - 1.360.000 = -3870$, ou seja, um erro de **3870** frente ao valor **1.356.130**. Se não aumentássemos um dígito, teríamos o valor de $1,35 \times 10^6$ com um erro de $1.356.130 - 1.350.000 = 6130$, que é um erro maior do que o erro no caso em que acrescentamos uma unidade ao último algarismo mantido ($6130 > 3870$). Podemos simplesmente concluir que **1.356.130** está mais próximo de **1.360.000** do que de **1.350.000** e com isso a aproximação $1,36 \times 10^6$ é melhor.

Quando o primeiro algarismo descartado for exatamente **5**, aplicamos a mesma

regra e arredondamos para cima. Por exemplo:

$1.355.000 = 1,355 \times 10^6$ será aproximado para $1,36 \times 10^6 = 1.360.000$. Embora os dois valores vizinhos estejam à mesma distância, adotaremos sempre esta única convenção, evitando respostas diferentes.

O mesmo vale se houver outros algarismos depois do 5. Por exemplo:

$1.355.005 = 1,355005 \times 10^6$ será aproximado para $1,36 \times 10^6 = 1.360.000$. As diferenças corretas são $1.355.005 - 1.360.000 = -4995$ e $1.355.005 - 1.350.000 = 5005$. Comparando seus módulos, temos $4995 < 5005$, confirmando que $1.355.005$ está mais próximo de $1.360.000$. Caso queiramos uma aproximação com menor erro, aumentamos as casas após a vírgula mantendo a mesma forma de raciocínio, sempre analisando o dígito que será desconsiderado.

Devemos evitar arredondar cedo demais, pois pequenas aproximações podem se acumular ao longo de várias operações. Por isso, manteremos algumas casas durante o cálculo e faremos o arredondamento solicitado apenas no resultado final.

Exemplo 3.13

- a) $3.587.000 = 3,587 \times 10^6 \simeq 3,59 \times 10^6$
- b) $260.005.000 = 2,60005 \times 10^8 \simeq 2,60 \times 10^8$
- c) $1.230.007.800 = 1,2300078 \times 10^9 \simeq 1,23 \times 10^9$
- d) $0,060056 = 6,0056 \times 10^{-2} \simeq 6,01 \times 10^{-2}$
- e) $0,00234705 = 2,34705 \times 10^{-3} \simeq 2,35 \times 10^{-3}$
- f) $0,000005678 = 5,678 \times 10^{-6} \simeq 5,68 \times 10^{-6}$
- g) $0,000000000002380089 = 2,380089 \times 10^{-12} \simeq 2,38 \times 10^{-12}$

Agora que já sabemos converter qualquer número extenso em um número em notação científica com o uso de aproximações, levando em conta algarismos significativos, podemos aprender como fazer as operações matemáticas básicas usando a base 10.

Veja como essa regra funciona. Na adição $2,3 + 1,25 = 3,55$, escrevemos o resultado como 3,6, pois o dado 2,3 tem apenas uma casa após a vírgula. Na multiplicação $2,3 \times 1,25 = 2,875$, escrevemos 2,9, pois o dado 2,3 tem dois algarismos significativos. Faremos mais aplicações nos volumes de Física. Essas regras são usadas quando os números representam medidas com uma precisão informada. Nas próximas seções, primeiro destacaremos as operações com potências de dez.

3.3 Adição

Na adição, temos uma pequena dificuldade. Para somar diretamente as mantissas, os valores precisam estar escritos com o **mesmo expoente**. Com isso, muitas vezes necessitamos mudar a forma de visualizar os valores, de modo que os valores que serão somados estejam com o mesmo expoente. Quando isso ocorre (os valores a serem somados têm o mesmo expoente), somente precisamos **SOMAR as mantissas** e **MANTER o expoente**.

Exemplo 3.14

a) $3 \times 10^7 + 5 \times 10^7 = (3 + 5) \times 10^7 = 8 \times 10^7$

b) $145 \times 10^{32} + 105 \times 10^{32} = (145 + 105) \times 10^{32} = 250 \times 10^{32} = 2,5 \times 10^{34}$

c) $0,032 \times 10^{-5} + 0,17 \times 10^{-5} = (0,032 + 0,17) \times 10^{-5} = 0,202 \times 10^{-5} = 2,02 \times 10^{-6}$

d) $8 \times 10^{12} + 18 \times 10^{12} + 6 \times 10^{12} = (8 + 18 + 6) \times 10^{12} = 32 \times 10^{12} = 3,2 \times 10^{13}$

Porém quando os valores não possuem o mesmo expoente, devemos primeiro manipular os números de modo que fiquem com o mesmo expoente e só então efetuar a soma.

Exemplo 3.15

a)

$$\begin{aligned} \underbrace{3 \times 10^2}_{300} + \underbrace{5 \times 10^1}_{50} &= \overbrace{30 \times 10^1}^{300} + \overbrace{5 \times 10^1}^{50} \\ &= (30 + 5) \times 10^1 \\ &= 35 \times 10^1 \\ &= \underbrace{3,5 \times 10^2}_{=350} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \underbrace{3 \times 10^2}_{300} + \underbrace{5 \times 10^1}_{50} &= \overbrace{3 \times 10^2}^{300} + \overbrace{0,5 \times 10^2}^{50} \\ &= (3 + 0,5) \times 10^2 \end{aligned}$$

$$= \underbrace{3,5 \times 10^2}_{=350}$$

b)

$$\begin{aligned} \underbrace{1,5 \times 10^4}_{15.000} + \underbrace{3 \times 10^1}_{30} &= \overbrace{1500 \times 10^1}^{15.000} + \overbrace{3 \times 10^1}^{30} \\ &= (1500 + 3) \times 10^1 \\ &= 1503 \times 10^1 \\ &= \underbrace{1,503 \times 10^4}_{=15.030} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \underbrace{1,5 \times 10^4}_{15.000} + \underbrace{3 \times 10^1}_{30} &= \overbrace{1,5 \times 10^4}^{15.000} + \overbrace{0,003 \times 10^4}^{30} \\ &= (1,5 + 0,003) \times 10^4 \\ &= \underbrace{1,503 \times 10^4}_{=15.030} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \underbrace{5 \times 10^{-4}}_{0,0005} + \underbrace{3 \times 10^{-3}}_{0,003} &= \overbrace{0,5 \times 10^{-3}}^{0,0005} + \overbrace{3 \times 10^{-3}}^{0,003} \\ &= (0,5 + 3) \times 10^{-3} \\ &= \underbrace{3,5 \times 10^{-3}}_{=0,0035} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \underbrace{5 \times 10^{-4}}_{0,0005} + \underbrace{3 \times 10^{-3}}_{0,003} &= \overbrace{5 \times 10^{-4}}^{0,0005} + \overbrace{30 \times 10^{-4}}^{=0,003} \\ &= (5 + 30) \times 10^{-4} \\ &= 35 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

$$= \underbrace{3,5 \times 10^{-3}}_{0,0035}$$

d)

$$\begin{aligned} \underbrace{4 \times 10^2}_{400} + \underbrace{3 \times 10^3}_{3000} + \underbrace{5 \times 10^1}_{50} &= \overbrace{0,4 \times 10^3}^{400} + \overbrace{3 \times 10^3}^{3000} + \overbrace{0,05 \times 10^3}^{50} \\ &= (0,4 + 3 + 0,05) \times 10^3 \\ &= \underbrace{3,45 \times 10^3}_{=3450} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \underbrace{4 \times 10^2}_{400} + \underbrace{3 \times 10^3}_{3000} + \underbrace{5 \times 10^1}_{50} &= \overbrace{4 \times 10^2}^{400} + \overbrace{30 \times 10^2}^{3000} + \overbrace{0,5 \times 10^2}^{50} \\ &= (4 + 30 + 0,5) \times 10^2 \\ &= 34,5 \times 10^2 \\ &= \underbrace{3,45 \times 10^3}_{=3450} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \underbrace{4 \times 10^2}_{400} + \underbrace{3 \times 10^3}_{3000} + \underbrace{5 \times 10^1}_{50} &= \overbrace{40 \times 10^1}^{400} + \overbrace{300 \times 10^1}^{3000} + \overbrace{5 \times 10^1}^{50} \\ &= (40 + 300 + 5) \times 10^1 \\ &= 345 \times 10^1 \\ &= \underbrace{3,45 \times 10^3}_{=3450} \end{aligned}$$

A escolha de qual dos valores será modificado para que todos tenham o mesmo expoente é indiferente. Nos exemplos acima, resolvemos os problemas de todas as formas possíveis, modificando um dos valores a cada vez. Desde que a matemática aplicada esteja correta, o resultado será o mesmo.

3.4 Subtração

Da mesma forma que ocorre na adição, a maior dificuldade na subtração é deixar os valores com o **mesmo expoente**. Estando todos os números com o mesmo expoente, somente precisamos **SUBTRAIR as mantissas** e **MANTER o expoente**.

Exemplo 3.16

- a) $8 \times 10^7 - 5 \times 10^7 = (8 - 5) \times 10^7 = 3 \times 10^7$
 b) $250 \times 10^{32} - 140 \times 10^{32} = (250 - 140) \times 10^{32} = 110 \times 10^{32} = 1,1 \times 10^{34}$
 c) $0,085 \times 10^{-5} - 0,15 \times 10^{-5} = (0,085 - 0,15) \times 10^{-5} = -0,065 \times 10^{-5} = -6,5 \times 10^{-7}$
 d) $6 \times 10^4 - 13 \times 10^4 - 8 \times 10^4 = (6 - 13 - 8) \times 10^4 = -15 \times 10^4 = -1,5 \times 10^5$

Novamente, quando os valores não possuem o mesmo expoente, devemos primeiro manipular os números de modo que fiquem com o mesmo expoente e só então efetuar a subtração.

Exemplo 3.17

a)

$$\begin{aligned} \underbrace{3 \times 10^2}_{300} - \underbrace{5 \times 10^1}_{50} &= \overbrace{30 \times 10^1}^{300} - \overbrace{5 \times 10^1}^{50} \\ &= (30 - 5) \times 10^1 \\ &= 25 \times 10^1 \\ &= \underbrace{2,5 \times 10^2}_{=250} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \underbrace{3 \times 10^2}_{300} - \underbrace{5 \times 10^1}_{50} &= \overbrace{3 \times 10^2}^{300} - \overbrace{0,5 \times 10^2}^{50} \\ &= (3 - 0,5) \times 10^2 \\ &= \underbrace{2,5 \times 10^2}_{=250} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \underbrace{1,5 \times 10^4}_{15.000} - \underbrace{3 \times 10^1}_{30} &= \overbrace{1500 \times 10^1}^{15.000} - \overbrace{3 \times 10^1}^{30} \\
 &= (1500 - 3) \times 10^1 \\
 &= 1497 \times 10^1 \\
 &= \underbrace{1,497 \times 10^4}_{=14.970}
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 \underbrace{1,5 \times 10^4}_{15.000} - \underbrace{3 \times 10^1}_{30} &= \overbrace{1,5 \times 10^4}^{15.000} - \overbrace{0,003 \times 10^4}^{30} \\
 &= (1,5 - 0,003) \times 10^4 \\
 &= \underbrace{1,497 \times 10^4}_{=14.970}
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \underbrace{5 \times 10^{-4}}_{0,0005} - \underbrace{3 \times 10^{-3}}_{0,003} &= \overbrace{0,5 \times 10^{-3}}^{0,0005} - \overbrace{3 \times 10^{-3}}^{0,003} \\
 &= (0,5 - 3) \times 10^{-3} \\
 &= \underbrace{-2,5 \times 10^{-3}}_{=-0,0025}
 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 \underbrace{5 \times 10^{-4}}_{0,0005} - \underbrace{3 \times 10^{-3}}_{0,003} &= \overbrace{5 \times 10^{-4}}^{0,0005} - \overbrace{30 \times 10^{-4}}^{0,003} \\
 &= (5 - 30) \times 10^{-4} \\
 &= -25 \times 10^{-4} \\
 &= \underbrace{-2,5 \times 10^{-3}}_{=-0,0025}
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \underbrace{4 \times 10^2}_{400} - \underbrace{3 \times 10^3}_{3000} - \underbrace{5 \times 10^1}_{50} &= \overbrace{0,4 \times 10^3}^{400} - \overbrace{3 \times 10^3}^{3000} - \overbrace{0,05 \times 10^3}^{50} \\ &= (0,4 - 3 - 0,05) \times 10^3 \\ &= \underbrace{-2,65 \times 10^3}_{=-2650} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \underbrace{4 \times 10^2}_{400} - \underbrace{3 \times 10^3}_{3000} - \underbrace{5 \times 10^1}_{50} &= \overbrace{4 \times 10^2}^{400} - \overbrace{30 \times 10^2}^{3000} - \overbrace{0,5 \times 10^2}^{50} \\ &= (4 - 30 - 0,5) \times 10^2 \\ &= -26,5 \times 10^2 \\ &= \underbrace{-2,65 \times 10^3}_{=-2650} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \underbrace{4 \times 10^2}_{400} - \underbrace{3 \times 10^3}_{3000} - \underbrace{5 \times 10^1}_{50} &= \overbrace{40 \times 10^1}^{400} - \overbrace{300 \times 10^1}^{3000} - \overbrace{5 \times 10^1}^{50} \\ &= (40 - 300 - 5) \times 10^1 \\ &= -265 \times 10^1 \\ &= \underbrace{-2,65 \times 10^3}_{=-2650} \end{aligned}$$

De novo vemos que a escolha de qual dos valores será modificado para que todos tenham o mesmo expoente é indiferente.

3.5 Multiplicação

Multiplicar números em base 10 é mais fácil, pois não precisamos nos importar com a forma dos números. Não há necessidade de os valores terem o mesmo expoente; somente é necessário **MULTIPLICAR as mantissas** e **SOMAR os**

expoentes.

Exemplo 3.18

a)

$$\begin{aligned}(8 \times 10^7) \cdot (5 \times 10^4) &= (8 \times 5) \times 10^{(7+4)} \\ &= 40 \times 10^{11} \\ &= 4 \times 10^{12}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(25 \times 10^{32}) \cdot (7 \times 10^8) &= (25 \times 7) \times 10^{(32+8)} \\ &= 175 \times 10^{40} \\ &= 1,75 \times 10^{42}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}(0,05 \times 10^{-8}) \cdot (400 \times 10^{12}) &= (0,05 \times 400) \times 10^{(-8+12)} \\ &= 20 \times 10^4 \\ &= 2 \times 10^5\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}(5 \times 10^{-8}) \cdot (0,3 \times 10^{-16}) &= (5 \times 0,3) \times 10^{[-8+(-16)]} \\ &= 1,5 \times 10^{-24}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}(0,5 \times 10^{18}) \cdot (30 \times 10^{-26}) &= (0,5 \times 30) \times 10^{[18+(-26)]} \\ &= 15 \times 10^{-8} \\ &= 1,5 \times 10^{-7}\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}(9 \times 10^9) \cdot (6 \times 10^{-6}) \cdot (5 \times 10^{-12}) &= (9 \times 6 \times 5) \times 10^{[9+(-6)+(-12)]} \\ &= 270 \times 10^{-9} \\ &= 2,7 \times 10^{-7}\end{aligned}$$

3.6 Divisão

Dividir números em base 10 segue a mesma lógica da multiplicação. Não há necessidade de os valores terem o mesmo expoente; somente é necessário **DIVIDIR as mantissas e SUBTRAIR os expoentes**.

Exemplo 3.19

a)

$$\begin{aligned}(8 \times 10^7)/(4 \times 10^4) &= \left(\frac{8}{4}\right) \times 10^{(7-4)} \\ &= 2 \times 10^3\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(21 \times 10^{32})/(7 \times 10^8) &= \left(\frac{21}{7}\right) \times 10^{(32-8)} \\ &= 3 \times 10^{24}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}(0,05 \times 10^{-8})/(400 \times 10^{12}) &= \left(\frac{0,05}{400}\right) \times 10^{(-8-12)} \\ &= 0,000125 \times 10^{-20} \\ &= 1,25 \times 10^{-24}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}(5 \times 10^{-8})/(0,25 \times 10^{-13}) &= \left(\frac{5}{0,25}\right) \times 10^{[-8-(-13)]} \\ &= 20 \times 10^5 \\ &= 2 \times 10^6\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}(0,5 \times 10^{18})/(100 \times 10^{-26}) &= \left(\frac{0,5}{100}\right) \times 10^{[18-(-26)]} \\ &= 0,005 \times 10^{44} \\ &= 5 \times 10^{41}\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}
 (12 \times 10^3) / [(6 \times 10^{-3}) / (2 \times 10^{-2})] &= \left(\frac{12}{\frac{6}{2}} \right) \times 10^{\{3 - [(-3) - (-2)]\}} \\
 &= \left(\frac{12}{3} \right) \times 10^{3 - (-1)} \\
 &= 4 \times 10^4
 \end{aligned}$$

3.7 Exponenciação

Na exponenciação em base 10, simplesmente **ELEVAMOS a mantissa à POTÊNCIA** designada e **MULTIPLICAMOS o expoente por essa POTÊNCIA**.

Exemplo 3.20

a)

$$\begin{aligned}
 (2 \times 10^7)^2 &= (2^2) \times 10^{(7 \times 2)} \\
 &= 4 \times 10^{14}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 (3 \times 10^5)^3 &= (3^3) \times 10^{(5 \times 3)} \\
 &= 27 \times 10^{15} = 2,7 \times 10^{16}
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 (30 \times 10^{-8})^4 &= (30^4) \times 10^{[(-8) \times 4]} \\
 &= 810.000 \times 10^{-32} \\
 &= 8,1 \times 10^{-27}
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 (1,5 \times 10^{-3})^7 &= (1,5^7) \times 10^{[(-3) \times 7]} \\
 &= 17,0859375 \times 10^{-21} \\
 &\simeq 1,71 \times 10^{-20}
 \end{aligned}$$

3.8 Radiciação

Na radiciação em base 10, devemos **CALCULAR A RAIZ da mantissa conforme o índice designado** e **DIVIDIR o expoente da base 10 pelo índice**.

Exemplo 3.21

a)

$$\begin{aligned}\sqrt{4 \times 10^8} &= (\sqrt{4}) \times 10^{(\frac{8}{2})} \\ &= 2 \times 10^4\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{27 \times 10^{12}} &= (\sqrt[3]{27}) \times 10^{(\frac{12}{3})} \\ &= 3 \times 10^4\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{3125 \times 10^{45}} &= (\sqrt[5]{3125}) \times 10^{(\frac{45}{5})} \\ &= 5 \times 10^9\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{5 \times 10^6} &= (\sqrt[3]{5}) \times 10^{(\frac{6}{3})} \\ &\simeq 1,70997 \times 10^2 \\ &\simeq 1,71 \times 10^2\end{aligned}$$

Uma dificuldade no caso da radiciação é quando o expoente da base 10 não é um múltiplo inteiro do índice. Neste caso devemos manipular a forma do número de modo que o expoente da base 10 seja um múltiplo inteiro do índice.

Exemplo 3.22

a)

$$\begin{aligned}\sqrt{1,6 \times 10^7} &= \sqrt{16 \times 10^6} \\ &= (\sqrt{16}) \times 10^{(\frac{6}{2})} \\ &= 4 \times 10^3\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{5,5 \times 10^7} &= \sqrt[3]{55 \times 10^6} \\ &= \left(\sqrt[3]{55}\right) \times 10^{\left(\frac{6}{3}\right)} \\ &\simeq 3,8 \times 10^2\end{aligned}$$

Síntese do capítulo

A notação científica escreve qualquer número como uma mantissa multiplicada por uma potência de dez, o que torna práticos os valores muito grandes ou muito pequenos. As operações com esses números seguem as regras das potências de base dez. A ordem de grandeza aponta a potência de dez mais próxima do valor, e os algarismos significativos indicam a precisão com que a medida foi tomada.

Lista de exercícios 3

1. Transforme os valores abaixo para base 10 com expoentes 10^{-2} e 10^2 :

a- ex: $275 = 27.500 \times 10^{-2} = 2,75 \times 10^2$

b- 15

c- 3

d- 200

e- 0,5

f- 0,06

g- 100

h- 113

i- 0,45

j- 0,0004567

2. Escreva na forma decimal os seguintes valores:

a- ex: $0,003547 \times 10^4 = 35,47$

b- $0,005 \times 10^5$

c- 25×10^{-5}

d- $0,00000512 \times 10^7$

e- 122×10^5

f- $0,00525 \times 10^2$

g- $128,45 \times 10^{-3}$

h- $458,765 \times 10^{-7}$

i- $0,000000234 \times 10^{12}$

j- $25,002 \times 10^8$

3. Escreva em notação científica os seguintes valores:

a- ex: $0,00253547 \times 10^{-2} = 2,53547 \times 10^{-5}$

b- 0,000002565555

c- 2.650.035.700

d- $0,000300672 \times 10^7$

e- 1002,77

f- $0,0000300125 \times 10^2$

g- 104.767×10^{-3}

h- $0,00043500009 \times 10^{-7}$

i- $0,0000002317 \times 10^{12}$

j- $4.567.002 \times 10^{12}$

4. Escreva em notação científica, com dois algarismos após a vírgula, os seguintes valores:

a- ex: $0,00253547 \times 10^{-2} = 2,54 \times 10^{-5}$

b- $0,00000135256$

c- $4.587.952$

d- $0,00033500125 \times 10^7$

e- 135.056

f- $0,0000947568 \times 10^2$

g- 114.467×10^{-3}

h- $0,0002351002 \times 10^{-7}$

i- $0,000000239214 \times 10^{12}$

j- $957.342.100.005 \times 10^{12}$

5. Determine a ordem de grandeza de cada valor:

a- 4×10^6 .

b- $2,5 \times 10^{-8}$.

c- 7×10^3 .

d- 820 .

e- $0,0004$.

f- 95.000 .

g- $1.200.000$.

h- $3,4 \times 10^5$.

i- 3×10^9 .

j- A ordem de grandeza do raio da Terra é 10^7 m e a de uma formiga é 10^{-3} m. Quantas ordens de grandeza as separam?

6. Resolva as seguintes operações colocando as respostas em notação científica.

a- $2 \times 10^7 + 5 \times 10^6 =$

b- $1,6 \times 10^{-4} + 3,7 \times 10^{-3} =$

c- $8 \times 10^9 - 2 \times 10^7 =$

d- $5,2 \times 10^{-12} - 8,5 \times 10^{-11} =$

e- $(3,2 \times 10^{27}) \times (4 \times 10^6) =$

f- $(9,2 \times 10^{-14}) \times (2,75 \times 10^8) =$

g- $(4 \times 10^9) / (2 \times 10^6) =$

h- $(-9,6 \times 10^{14}) / (3,2 \times 10^{-18}) =$

i- $(6 \times 10^4)^2 =$

j- $(-2 \times 10^{-6})^5 =$

k- $\sqrt{4 \times 10^8} =$

l- $\sqrt[5]{3,125 \times 10^{23}} =$

m- $(2 \times 10^3 + 5 \times 10^2) - [(4 \times 10^4) / (2 \times 10^1)] =$

n- $\left[(5 \times 10^{-4}) \times (2 \times 10^2)^4 \right] / \left(\sqrt{6,4 \times 10^{11}} \right) =$



Funções e Gráficos para Física

O que você vai aprender

- Reconhecer o que é uma função e identificar suas variáveis.
- Compreender e representar a função de primeiro grau.
- Compreender e representar a função quadrática.
- Localizar pontos no sistema de coordenadas cartesiano.
- Ler e interpretar gráficos usados na física.

Por que estudamos isto? As leis da física quase nunca falam de um número isolado; elas dizem como uma coisa muda quando outra muda. Dominar funções e gráficos é o que nos permite transformar essas relações em algo que podemos calcular, prever e, sobretudo, enxergar. Ao longo da coleção, será lendo um gráfico que descobriremos a velocidade de um corpo, a energia guardada numa mola ou o comportamento de um gás. Vale a pena, então, parar aqui e aprender a construir e interpretar gráficos com segurança.

4.1 O que é uma função

Boa parte da física consiste em descrever como uma grandeza depende de outra. A posição de um corpo depende do tempo, a força elástica depende da deformação da mola, a pressão de um gás depende da sua temperatura. Sempre que uma grandeza depende de outra desta forma, dizemos que temos uma **função**. Podemos pensar em uma função como uma máquina: nós colocamos um valor de entrada, a máquina aplica uma regra e devolve um valor de saída. O importante é que, para cada valor que colocamos, a máquina devolve sempre um, e apenas um, valor de saída.

Vamos a um exemplo bem cotidiano. Imagine que um quilograma de um certo produto custa dez reais. O preço a pagar depende da quantidade que compramos: se levamos 1 kg, pagamos dez reais; se levamos 2 kg, pagamos vinte; e assim por diante. A quantidade é o valor que escolhemos livremente, e o preço é o valor que fica determinado por ela. Note que aqui aparece a ideia central: escolhida a quantidade, o preço está definido sem ambiguidade.

Chamamos de **variável independente** aquela que escolhemos livremente, e de **variável dependente** aquela cujo valor fica determinado pela regra. No exemplo do produto, a quantidade é a variável independente e o preço é a variável dependente. Podemos organizar essa dependência em uma pequena tabela, colocando de um lado o que escolhemos e do outro o que resulta:

quantidade (kg)	preço (R\$)
1	10
2	20
3	30
4	40

De forma geral, uma função é uma regra que associa, a cada valor de uma grandeza, um único valor de outra grandeza. Na física, é comum a variável independente ser o tempo. Por exemplo, se a posição (S) de um carro depende do tempo (t), o tempo é a variável independente e a posição é a variável dependente. Escrevemos isso na forma

$$S = f(t),$$

que lemos como “ S é função de t ”. Para cada instante de tempo, o carro ocupa uma única posição; é justamente isso que caracteriza uma função.

Vale a pena insistir nesse ponto, porque é onde mora a definição. Uma mesma variável independente não pode levar a dois valores diferentes da variável dependente ao mesmo tempo. Pense de novo no carro: não faria sentido dizer que, no mesmo instante, ele está em duas posições distintas. Por outro lado, nada impede que dois instantes diferentes correspondam à mesma posição, afinal o carro pode passar duas vezes pelo mesmo lugar. O que a função proíbe é uma entrada gerar duas saídas, não o contrário.

Exemplo 4.1

A posição de um objeto é dada pela função $S = f(t) = 3 + 2 \cdot t$, com (S) em metros e (t) em segundos. Determine a posição nos instantes $t = 0$, $t = 1$ e $t = 4$.

Basta colocar cada valor do tempo (a variável independente) na regra da função:

$$t = 0 \Rightarrow S = 3 + 2 \cdot 0 = 3 \text{ m}$$

$$t = 1 \Rightarrow S = 3 + 2 \cdot 1 = 5 \text{ m}$$

$$t = 4 \Rightarrow S = 3 + 2 \cdot 4 = 11 \text{ m}.$$

Para cada instante, obtemos uma única posição, como se espera de uma função.

Exemplo 4.2

Um produto custa R\$ 6,00 por quilograma. Escreva o preço p como função da quantidade q (em kg), identifique as variáveis independente e dependente e

calcule o preço de 3,5 kg.

O preço é sempre a quantidade multiplicada por 6, de modo que

$$p = 6 \cdot q.$$

Aqui a quantidade q é a variável independente (nós a escolhemos livremente) e o preço p é a dependente (fica determinado por q). Para $q = 3,5$,

$$p = 6 \cdot 3,5 = 21.$$

O preço de 3,5 kg é R\$ 21,00.

Exemplo 4.3

Em cada caso, decida se y é função de x :

- a) a cada número x associamos o seu dobro, $y = 2 \cdot x$;
- b) a cada número x associamos os valores y tais que $y^2 = x$.

Basta verificar se cada entrada gera uma única saída:

- a) para cada x existe um único dobro, então **é função**;
- b) para $x = 4$, teríamos $y = 2$ e $y = -2$, ou seja, duas saídas para a mesma entrada; portanto **não é função**.

4.2 Função de primeiro grau

A função mais simples e mais usada na física básica é a **função de primeiro grau**. Nela, a variável dependente varia sempre pela mesma quantidade a cada unidade da variável independente, e por isso seu gráfico é uma reta. De forma geral, escrevemos a função de primeiro grau como

FUNÇÃO DE PRIMEIRO GRAU

$$y = a \cdot x + b$$

(4.1)

SIGNIFICADO DOS TERMOS

- $y \rightarrow$ variável dependente
- $x \rightarrow$ variável independente
- $a \rightarrow$ coeficiente angular (inclinação da reta)
- $b \rightarrow$ coeficiente linear (onde a reta corta o eixo vertical)

em que (a) é chamado de **coeficiente angular** e (b) de **coeficiente linear**. O coeficiente angular (a) informa a inclinação da reta, ou seja, o quanto (y) varia para cada unidade que (x) aumenta. Já o coeficiente linear (b) informa onde a reta

corta o eixo vertical, isto é, o valor de (y) quando (x) vale zero.

É importante perceber que muitas equações da física têm exatamente essa forma. Por exemplo, a posição de um corpo em movimento retilíneo uniforme, dada por $S = S_0 + v \cdot t$, é uma função de primeiro grau do tempo: o termo (S_0) faz o papel do coeficiente linear (b) e a velocidade (v) faz o papel do coeficiente angular (a) . Note que reconhecer essa semelhança nos ajuda a interpretar rapidamente o gráfico do movimento.

Exemplo 4.4

Uma reta tem coeficiente angular $a = 2$ e coeficiente linear $b = 1$, ou seja, $y = 2x + 1$. Determine o valor de (y) para $x = 0$, $x = 1$ e $x = 3$.

Basta substituir cada valor de (x) na função:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 2 \cdot 3 + 1 = 7.$$

Note que, a cada unidade que (x) aumenta, (y) aumenta de 2, que é justamente o coeficiente angular.

Exemplo 4.5

Escreva a função de primeiro grau cuja reta corta o eixo vertical em $y = 5$ e cujo valor de (y) diminui 3 unidades a cada unidade que (x) aumenta.

O ponto em que a reta corta o eixo vertical é o coeficiente linear, logo $b = 5$. Como (y) diminui 3 a cada unidade de (x) , o coeficiente angular é negativo, $a = -3$. A função é

$$y = -3 \cdot x + 5.$$

4.3 Função quadrática

Outra função muito presente na física é a **função quadrática**, ou **função do segundo grau**. Ela é aquela em que a variável independente aparece elevada ao quadrado, e sua forma geral é

FUNÇÃO QUADRÁTICA

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

(4.2)

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$y \rightarrow$ variável dependente
 $x \rightarrow$ variável independente
 $a, b, c \rightarrow$ coeficientes (com $a \neq 0$)

com (a) diferente de zero. O gráfico de uma função quadrática não é uma reta, e sim uma curva chamada **parábola**. Quando o coeficiente (a) é positivo, a parábola tem concavidade voltada para cima; quando (a) é negativo, a concavidade fica voltada para baixo.

Assim como no caso da função de primeiro grau, essa função aparece naturalmente na física. Quando a aceleração é constante e diferente de zero, a posição $S = S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$ é uma função quadrática do tempo e seu gráfico tem o formato de uma parábola. Se a aceleração for zero, a expressão se reduz a uma função de primeiro grau. Devemos ter claro que os coeficientes da função carregam significado físico, e não são apenas números.

Exemplo 4.6

Considere a função $y = x^2 - 4x + 3$. Determine o valor de (y) para $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$.

Substituindo cada valor de (x) :

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 - 0 + 3 = 3$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1 - 4 + 3 = 0$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 4 - 8 + 3 = -1$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 9 - 12 + 3 = 0.$$

Note que a função vale zero em $x = 1$ e $x = 3$, que são as **raízes da função**, e atinge seu menor valor em $x = 2$, ponto que chamamos de **vértice**.

4.4 Sistemas de coordenadas

Até aqui obtivemos os valores de uma função apenas por meio de contas. Mas há uma forma visual, muitas vezes mais reveladora, de enxergar como uma grandeza depende de outra: o **gráfico**. Antes de ler qualquer gráfico, porém, precisamos do palco em que ele é desenhado, e esse palco é o **sistema de coordenadas**. Durante o ensino básico vamos nos ater a, no máximo, duas dimensões, usando o sistema de coordenadas cartesianas. Existem vários outros sistemas, úteis em estudos mais avançados, mas aqui eles não serão necessários.

Sistema unidimensional

No início dos estudos da física conheceremos grandezas como deslocamento, velocidade e aceleração levando em conta unicamente seus valores numéricos (mais adiante veremos que, para descrever por completo essas grandezas, outras informações serão necessárias). Isso é possível quando estamos presos a um sistema de coordenadas unidimensional, ou seja, um sistema em que só há um sentido de progresso e um de regresso, como nos exemplos a seguir.

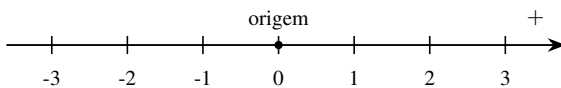


Figura 4.1: Sistema de coordenadas retilíneo unidimensional.

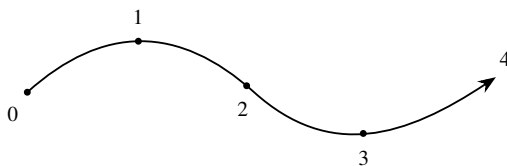


Figura 4.2: Sistema de coordenadas curvilíneo unidimensional.

Algumas informações ficam explícitas ao observar as figuras 4.1 e 4.2. Temos uma seta apontando para onde o sistema progride (aumenta no sentido positivo), uma origem (o valor 0) e um sentido regressivo (aumenta no sentido negativo). Vemos ainda que as distâncias são numeradas e obedecem a uma regra.

Os espaços entre dois pontos representados pela mesma distância devem sempre ter valores equivalentes.

Nosso sistema de coordenadas não precisa ser sempre uma linha reta. Sendo unidimensional, ele pode representar uma estrada, um caminho ou qualquer outra trajetória com curvas. O que deve ser sempre respeitado é que o espaçamento entre um ponto marcado e outro seja equivalente numericamente e que o sistema tenha uma indicação de sentido positivo.

Sistema bidimensional

O sistema que mais usaremos é o bidimensional em coordenadas cartesianas. Nele teremos um eixo x (em geral atribuído à horizontal) e um eixo y (em geral atribuído à vertical). As regras de espaçamentos equivalentes e de um sentido de progresso continuam valendo, do mesmo modo que no caso unidimensional.

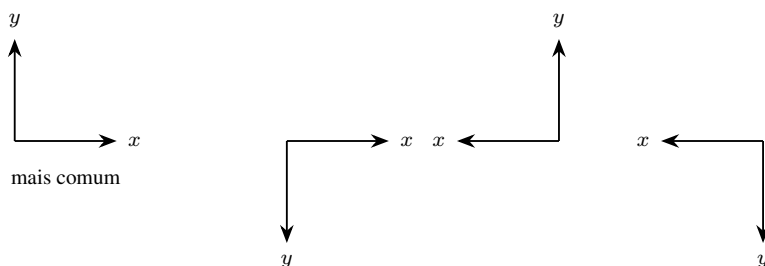


Figura 4.3: Diferentes orientações possíveis para os eixos de um sistema bidimensional.

Note que podemos ter diferentes orientações para os eixos x e y . O mais correto é o caso em que x aumenta para a direita e y aumenta para cima (o primeiro da figura 4.3). Dependendo da situação, porém, os outros casos podem ser usados sem problemas. Diferentemente do caso unidimensional, aqui estamos presos a situações em que x e y são descritos por retas. A origem do sistema fica na interseção dos eixos. Cada eixo deve manter a relação de que valores entre dois pontos de mesma distância sejam equivalentes, porém cada eixo pode ter uma escala diferente; ou seja, a regra do espaçamento equivalente vale para cada eixo separadamente, pois os eixos são independentes entre si.

Para localizar um ponto no plano, damos dois números, sempre na ordem (x, y) : o primeiro diz o quanto andar no eixo horizontal e o segundo o quanto andar no vertical. A origem é o ponto $(0, 0)$. Veja, na figura 4.4, o ponto $P = (3, 2)$.

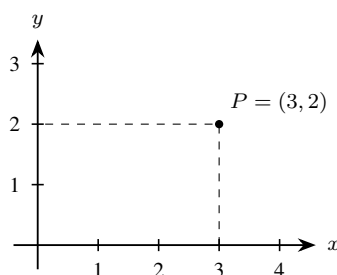


Figura 4.4: Localização do ponto $P = (3, 2)$ no plano cartesiano.

4.5 Leitura de gráficos físicos

Saber montar uma função é importante, mas na física é igualmente importante saber ler um gráfico já pronto e extrair dele informações. Um gráfico nada mais é do que a representação visual de uma função no sistema de coordenadas que acabamos de ver, e por isso tudo o que vimos até aqui se aplica diretamente a ele.

Vamos com calma, porque é aqui que a matemática vira física. Ao olhar para um gráfico, duas informações costumam nos interessar de forma especial: a inclinação da curva e a área debaixo dela. Vamos entender uma de cada vez.

Começemos pela inclinação. A inclinação de uma reta nos diz o quanto a grandeza do eixo vertical muda para cada unidade que a grandeza do eixo horizontal avança. Repare que isso é exatamente o coeficiente angular que vimos na função de primeiro grau. Num gráfico de posição por tempo, a grandeza vertical é a posição e a horizontal é o tempo; logo, a inclinação nos diz quanto a posição muda a cada segundo, e isso é justamente a velocidade. No mesmo gráfico e utilizando as mesmas escalas, uma reta crescente mais inclinada representa uma velocidade positiva maior. Já uma reta decrescente representa uma velocidade negativa. Veja a figura 4.5.

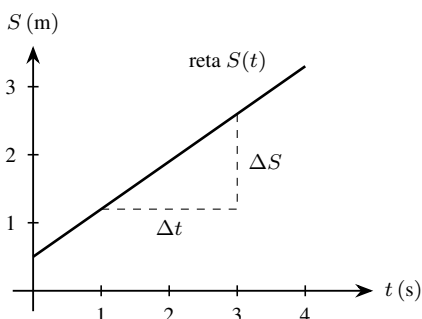


Figura 4.5: Em um gráfico de posição por tempo, a inclinação $\Delta S/\Delta t$ é a velocidade.

Exemplo 4.7

No gráfico da figura 4.5, ao passar de $t = 1$ s para $t = 3$ s, a posição sobe de 1,2 m para 2,6 m. Qual a velocidade do corpo?

A **velocidade** é a inclinação da reta, ou seja, o quanto a posição muda dividido pelo quanto o tempo muda:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2,6 - 1,2}{3 - 1}$$

$$v = \frac{1,4}{2} = 0,7.$$

A velocidade é de 0,7 m/s. Note que ela é constante, pois a inclinação de uma reta é sempre a mesma.

Agora a área. Em muitos gráficos, a região que fica entre a curva e o eixo horizontal também carrega um significado físico. No gráfico de velocidade por tempo, a região acima do eixo do tempo contribui positivamente para o deslocamento, enquanto a região abaixo contribui negativamente. Por isso, devemos considerar a área com seu sinal. A soma das áreas sem considerar os sinais está relacionada à distância percorrida. A ideia é simples de enxergar quando a velocidade é constante e positiva, pois a área é a de um retângulo, como na figura 4.6.

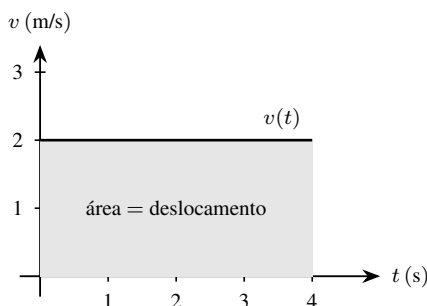


Figura 4.6: Em um gráfico de velocidade por tempo, a área sob a linha é o deslocamento.

Exemplo 4.8

Um corpo se move com velocidade constante de 2 m/s durante 4 s, como no gráfico da figura 4.6. Qual o deslocamento no período?

O **deslocamento** é a área do retângulo debaixo da linha, ou seja, a base (o tempo) vezes a altura (a velocidade):

$$\Delta S = \text{base} \times \text{altura} = 4 \times 2$$

$$\Delta S = 8.$$

O deslocamento é de 8 m. Repare que isso é o mesmo que $v \cdot t$, exatamente como no movimento com velocidade constante.

Um cuidado importante: a inclinação nem sempre significa velocidade. Ela significa velocidade apenas quando o eixo vertical é a posição. Se trocarmos a grandeza do eixo vertical, muda também o significado da inclinação. Num gráfico de velocidade por tempo, por exemplo, a inclinação nos diz quanto a velocidade muda a cada segundo, e isso é o que chamamos de **aceleração**. A regra por trás é sempre a mesma: a inclinação é o quanto a grandeza vertical muda por unidade da grandeza horizontal.

A inclinação de um gráfico é sempre a variação da grandeza vertical dividida pela da horizontal. Num gráfico $S \times t$ ela é a velocidade; num gráfico $v \times t$ ela é a aceleração.

Exemplo 4.9

Em um gráfico de velocidade por tempo, a velocidade de um carro passa de 4 m/s, em $t = 0$, para 10 m/s, em $t = 3$ s, seguindo uma reta. Qual a aceleração?

A aceleração é a inclinação da reta, ou seja, a variação da velocidade dividida pela variação do tempo:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10 - 4}{3 - 0}$$

$$a = \frac{6}{3} = 2.$$

A aceleração é de 2 m/s^2 : a cada segundo que passa, a velocidade aumenta 2 m/s .

Voltemos agora à área, que também tem mais a nos dizer. Vimos que, com velocidade constante, a área sob o gráfico de velocidade por tempo é um retângulo. Mas e quando a velocidade varia? Nesse caso a linha deixa de ser horizontal e a região sob ela costuma virar um triângulo, ou a soma de figuras simples. A boa notícia é que o significado não muda: a área, considerada com seu sinal, continua sendo o deslocamento. Basta calcular a área da figura que aparecer, como na figura 4.7.

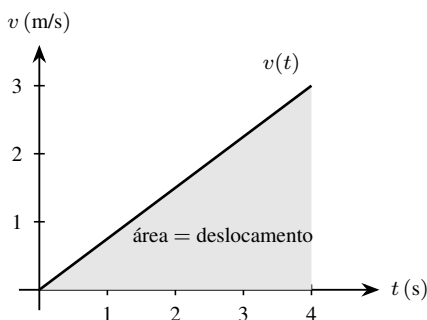


Figura 4.7: Quando a velocidade cresce de modo uniforme, a área sob a linha é um triângulo, mas continua representando o deslocamento.

Exemplo 4.10

Um corpo parte do repouso e sua velocidade cresce de forma uniforme até 3 m/s em 4 s , como na figura 4.7. Qual o deslocamento nesse intervalo?

A área sob a linha é um triângulo de base igual ao tempo e altura igual à velocidade final:

$$\Delta S = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{4 \times 3}{2}$$

$$\Delta S = 6.$$

O deslocamento é de 6 m. Compare com o exemplo anterior: como a velocidade partiu do zero, o corpo anda menos do que andaria se já tivesse os 3 m/s o tempo todo.

Por fim, assim como a inclinação, a área também não guarda sempre o mesmo significado: depende de quais grandezas estão nos eixos. Num gráfico de força por posição, a área representa o trabalho quando consideramos a componente da força na direção do deslocamento. No exemplo a seguir, a força está na mesma direção e no mesmo sentido do deslocamento. A ideia a levar daqui é que a área sob um gráfico é uma espécie de produto acumulado das duas grandezas dos eixos, e por isso muda de nome conforme o gráfico: em $v \times t$ ela é o deslocamento; em $F \times x$ (força por posição) ela é o trabalho.

Exemplo 4.11

Uma força constante de 5 N empurra um bloco ao longo de 3 m, no mesmo sentido do movimento. Em um gráfico de força por deslocamento, isso é um retângulo. Qual o trabalho realizado?

O **trabalho** é a área sob a linha, ou seja, a base (o deslocamento) vezes a altura (a força):

$$\tau = \text{base} \times \text{altura} = 3 \times 5$$

$$\tau = 15.$$

O trabalho realizado é de 15 J (joules). Note que a conta é a mesma de uma área de retângulo; só muda o nome do resultado, porque mudaram as grandezas dos eixos.

Não se preocupe em dominar isso agora; veremos esses usos em detalhe nos volumes de cinemática e de dinâmica. O importante é olhar para um gráfico com duas perguntas na cabeça: qual a inclinação e qual a área, checando sempre quais grandezas estão em cada eixo antes de dizer o que significam.

Síntese do capítulo

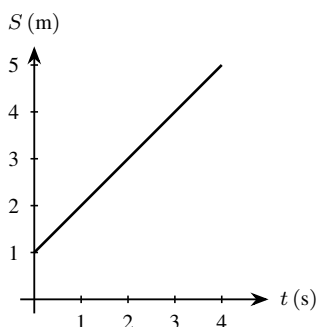
Uma função é uma regra que associa a cada valor de uma grandeza um único valor de outra, e no plano cartesiano ela é representada por um gráfico. A função de primeiro grau tem a forma $y = a \cdot x + b$ e gráfico em reta, aparecendo, por exemplo, no movimento retilíneo uniforme. A função quadrática tem a forma $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ e gráfico em parábola, aparecendo no movimento uniformemente variado. Todo gráfico é desenhado sobre um sistema de coordenadas, com origem, sentido de progresso e espaçamentos equivalentes em cada eixo. Ao ler um gráfico físico, a inclinação da curva e a área sob ela costumam carregar significado físico importante.

Lista de exercícios 4

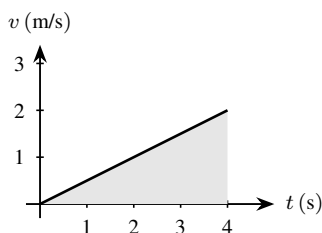
1. A posição de um corpo é dada por $S = f(t) = 5 + 3 \cdot t$ (em metros e segundos). Determine a posição para:
 - a- $t = 0$;
 - b- $t = 2$;
 - c- $t = 5$.
2. Na função $S = 5 + 3 \cdot t$ do exercício anterior, identifique qual é a variável independente e qual é a variável dependente.
3. Dada a função de primeiro grau $y = 3x - 2$, determine o valor de (y) para:
 - a- $x = 0$;
 - b- $x = 2$;
 - c- $x = 5$.
4. Em uma função de primeiro grau $y = a \cdot x + b$, sabe-se que a reta passa por $y = 1$ quando $x = 0$ e que (y) aumenta de 4 a cada unidade de (x) . Escreva a função.
5. Escreva a função de primeiro grau cuja reta corta o eixo vertical em $y = -2$ e cujo (y) diminui 5 unidades a cada unidade de (x) .
6. Dada a função quadrática $y = x^2 - 5x + 6$, determine:
 - a- o valor de (y) para $x = 0$;
 - b- as raízes (valores de (x) para os quais $y = 0$).
7. Na função quadrática $y = x^2 - 4x + 3$, determine o valor de (y) para $x = 2$ e diga se, nesse ponto, a parábola atinge seu maior ou menor valor.
8. Escreva as coordenadas (x, y) dos pontos:
 - a- a origem do sistema;
 - b- um ponto 3 unidades à direita e 1 acima da origem;
 - c- um ponto 2 unidades à direita e 4 acima da origem.
9. Considere o sistema unidimensional da figura 4.1. Partindo da origem, um objeto vai até o ponto 3 e depois recua até o ponto -1 . Em que ponto ele parou?
10. A posição de um corpo é dada por $S = 4 + 2 \cdot t$ (em metros e segundos). Identifique o valor da posição inicial e da velocidade, comparando com a forma $y = a \cdot x + b$.
11. Em um gráfico de posição por tempo, uma reta tem inclinação constante. O

que essa inclinação representa fisicamente? No mesmo gráfico e usando as mesmas escalas, o que indicaria uma reta crescente mais inclinada?

12. Em um gráfico de posição por tempo, a posição vai de 2 m (em $t = 1$ s) a 8 m (em $t = 4$ s). Qual a velocidade do corpo (inclinação da reta)?
13. Em um gráfico de velocidade por tempo, um corpo mantém velocidade constante de 3 m/s durante 5 s. Qual o deslocamento (área sob a linha)?
14. Dada a função quadrática $y = x^2 - 6x + 8$, determine:
 - a- o valor de (y) para $x = 0$;
 - b- as raízes.
15. Um gráfico de velocidade por tempo mostra a velocidade constante em 4 m/s dos 0 aos 3 s. Esboce o retângulo correspondente e calcule o deslocamento nesse intervalo.
16. A posição de um corpo é $S = 10 - 2 \cdot t$ (em metros e segundos). Identifique a posição inicial e a velocidade, e diga se o corpo se afasta ou se aproxima da origem.
17. O gráfico abaixo mostra a posição de um corpo em função do tempo. Determine a velocidade do corpo (a inclinação da reta).



18. O gráfico abaixo mostra um corpo que parte do repouso com velocidade crescendo de modo uniforme. Calcule o deslocamento (a área do triângulo sob a linha).





Trigonometria Essencial para Física

O que você vai aprender

- Reconhecer o triângulo retângulo e seus elementos.
- Definir e aplicar as funções seno, cosseno e tangente.
- Usar as funções inversas para encontrar ângulos.
- Resolver um triângulo retângulo a partir dos dados conhecidos.

Por que estudamos isto? A trigonometria será a nossa ferramenta para trabalhar com ângulos e, principalmente, para decompor vetores, algo que faremos bastante ao estudar forças e movimentos em rampas e planos inclinados. É também aqui que apresentamos o triângulo retângulo e o teorema de Pitágoras, que usaremos já na geometria, no cálculo de distâncias, e mais adiante com força total nos vetores.

O conhecimento da trigonometria é imprescindível para o desenvolvimento da física. Uma introdução ao estudo deste conteúdo é geralmente feita no ensino fundamental e um aprofundamento desenvolvido no ensino médio. Contudo, como este aprofundamento pode ocorrer após a necessidade deste conhecimento para o estudo da física, principalmente na área em que conheceremos a aplicação do uso de vetores, faremos aqui um apanhado de informações necessárias já no início do estudo da física.

Basicamente iremos analisar a trigonometria relacionada ao triângulo retângulo.

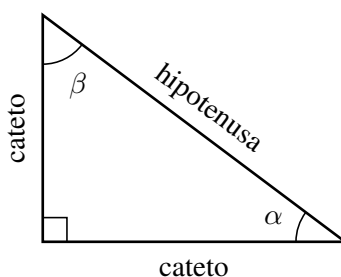


Figura 5.1: Triângulo retângulo.

Todo triângulo é formado por 3 segmentos de reta e possui 3 ângulos internos. Quando dois destes segmentos formam entre si um ângulo de 90 graus, temos um **TRIÂNGULO RETÂNGULO**. Veja pela figura 5.1 que chamamos de **CATETOS** os dois lados que formam o ângulo reto. Já a **HIPOTENUSA** é o lado oposto a esse ângulo. Sabendo que a soma de todos os ângulos internos de um triângulo é sempre 180° , e sendo sempre 90° um dos 3 ângulos internos do triângulo retângulo, temos que a soma dos outros dois ângulos ($\alpha + \beta$) sempre será o restante para completar os 180° , ou seja:

SOMA DOS ÂNGULOS AGUDOS

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

(5.1)

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$\alpha, \beta \rightarrow$ os dois ângulos agudos (diferentes de 90°)

Iremos agora conhecer três funções matemáticas associadas ao triângulo retângulo que nos serão úteis no estudo da física básica. São elas as funções *Seno*, *Cosseno* e *Tangente*. Para isso, necessitamos saber diferenciar o CATETO OPOSTO do CATETO ADJACENTE.

Qualquer um dos dois ângulos diferentes de 90° (α e β) terá sempre contato com um único cateto e com a hipotenusa. O cateto que **tem contato** com o ângulo em questão é o **cateto adjacente**. O cateto que **não toca** o ângulo em questão é o **cateto oposto**. Dependendo do ângulo analisado, determinado cateto poderá ser o oposto ou o adjacente.

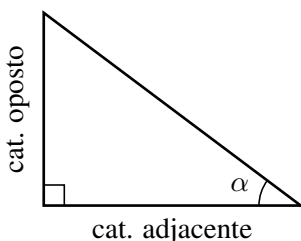


Figura 5.2: Configuração de catetos adjacente e oposto para o ângulo (α).

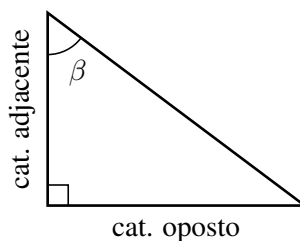


Figura 5.3: Configuração de catetos adjacente e oposto para o ângulo (β).

Desta forma, precisamos sempre saber qual ângulo estamos tomando como referência, para poder determinar a classificação dos catetos entre oposto e adjacente de forma correta. Para facilitar, chamaremos o cateto que está na horizontal de (x) e o que está na vertical de (y). Isso para seguir o padrão do sistema de coordenadas cartesiano. A hipotenusa chamaremos simplesmente de (h).

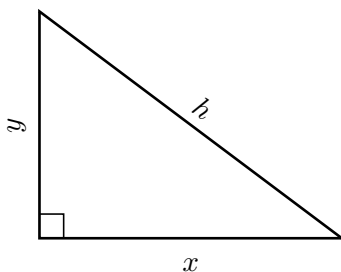


Figura 5.4: Triângulo retângulo com cateto (x), cateto (y) e hipotenusa (h).

Neste momento é importante relembrar a conhecida equação de PITÁGORAS, que nos diz que o valor da hipotenusa ao quadrado é sempre igual ao valor da soma dos catetos ao quadrado. Esta relação nos será bastante útil ao longo de toda a física estudada no ensino médio.

TEOREMA DE PITÁGORAS

$$h^2 = x^2 + y^2$$

(5.2)

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$h \rightarrow$ hipotenusa
 $x, y \rightarrow$ catetos

5.1 Seno

Associado ao estudo do triângulo retângulo, iremos definir a **função seno** como sendo a razão entre o CATETO OPOSTO a determinado ângulo dividido pela HIPOTENUSA

SENO

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{CATETO OPOSTO}}{\text{HIPOTENUSA}}$$

(5.3)

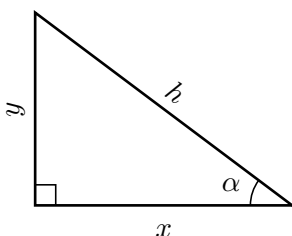


Figura 5.5: Triângulo retângulo com hipotenusa (h), cateto adjacente (x), cateto oposto (y) ao ângulo (α).

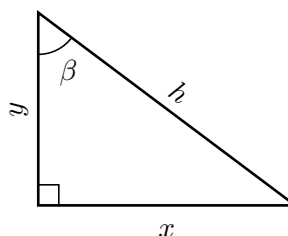


Figura 5.6: Triângulo retângulo com hipotenusa (h), cateto adjacente (y), cateto oposto (x) ao ângulo (β).

Sendo assim, nas situações distintas dos ângulos (α), conforme a figura 5.5, e do ângulo (β), conforme a figura 5.6, temos

SENO

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{h} \qquad \text{sen } \beta = \frac{x}{h}$$

(5.4)

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$h \rightarrow$ hipotenusa
 $x, y \rightarrow$ catetos oposto ou adjacente, conforme o ângulo

5.2 Cosseno

Podemos definir a **função cosseno** como sendo a razão entre o CATETO ADJACENTE a determinado ângulo dividido pela HIPOTENUSA

COSENO

$$\cos \theta = \frac{\text{CATETO ADJACENTE}}{\text{HIPOTENUSA}} \quad (5.5)$$

Sendo assim, nas situações distintas dos ângulos (α), conforme a figura 5.5, e do ângulo (β), conforme a figura 5.6, temos

COSENO

$$\cos \alpha = \frac{x}{h} \quad \cos \beta = \frac{y}{h} \quad (5.6)$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$h \rightarrow$ hipotenusa
 $x, y \rightarrow$ cateto adjacente ao ângulo considerado

5.3 Tangente

A **função tangente** de um certo ângulo é a razão entre a função seno e a função cosseno deste mesmo ângulo, ou seja

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}$$

Lembrando que

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &= \frac{\text{CATETO OPOSTO}}{\text{HIPOTENUSA}} \\ \text{cos } \theta &= \frac{\text{CATETO ADJACENTE}}{\text{HIPOTENUSA}} \end{aligned}$$

Temos

$$\text{tg } \theta = \frac{\frac{\text{CATETO OPOSTO}}{\text{HIPOTENUSA}}}{\frac{\text{CATETO ADJACENTE}}{\text{HIPOTENUSA}}}$$

TANGENTE

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{CATETO OPOSTO}}{\text{CATETO ADJACENTE}} \quad (5.7)$$

Sendo assim, nas situações distintas dos ângulos (α), conforme a figura 5.5, e do ângulo (β), conforme a figura 5.6, temos

TANGENTE

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{x}{y}$$

(5.8)

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$x, y \rightarrow$ catetos (oposto sobre adjacente ao ângulo)

Sabendo agora a definição correta para as funções seno, cosseno e tangente, podemos fazer uma pequena tabela, a Tabela 5.1, para alguns dos valores de ângulos mais usados nos exercícios. Para valores intermediários de ângulos será necessário o uso da calculadora científica ou de alguma tabela completa para todos os ângulos.

Tabela 5.1: Tabela Função Seno, Cosseno e Tangente

θ	0°	30°	45°	60°	90°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	não definida

A tangente de 90° não está definida, pois levaria a uma divisão por zero; na calculadora, isso aparece como erro ou valor indefinido.

5.4 Funções Inversas

Vimos até aqui que para determinado valor de ângulo que atribuímos as funções seno, cosseno e tangente, teremos como resposta um valor numérico

EXEMPLOS

- a) $\operatorname{sen} 30^\circ = 0,5$
- b) $\operatorname{cos} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,707$
- c) $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} \simeq 1,73$
- d) $\operatorname{sen} 28^\circ \simeq 0,47$
- e) $\operatorname{cos} 71^\circ \simeq 0,33$
- f) $\operatorname{tg} 54^\circ \simeq 1,38$

As **funções inversas** fornecem um ângulo principal.

$$\begin{aligned}\sin \theta = n &\implies \arcsen n = \theta_{\text{principal}}, \\ \cos \theta = n &\implies \arccos n = \theta_{\text{principal}}, \\ \operatorname{tg} \theta = n &\implies \operatorname{arctg} n = \theta_{\text{principal}}.\end{aligned}\tag{5.9}$$

EXEMPLOS

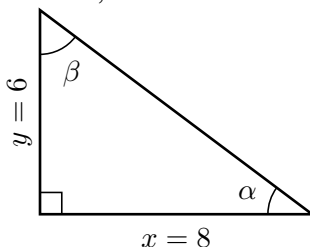
- a) $\arcsen 0,5 = 30^\circ$
- b) $\arccos 0,707 \simeq 45^\circ$
- c) $\operatorname{arctg} 1,73 \simeq 60^\circ$
- d) $\arcsen 0,47 \simeq 28^\circ$
- e) $\arccos 0,33 \simeq 71^\circ$
- f) $\operatorname{arctg} 1,38 \simeq 54^\circ$

Na calculadora, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ e tg^{-1} representam **arco-seno**, **arco-cosseno** e **arco-tangente**; $\sin^{-1}$ não significa $1/\sin \theta$, e o mesmo vale para as outras duas. A inversa fornece um ângulo principal: $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ = 0,5$, mas $\arcsen(0,5) = 30^\circ$. Se outros quadrantes forem possíveis, devemos observar o desenho ou as condições do problema.

Notemos que em um triângulo retângulo teremos **CINCO** valores que podem variar. São eles (α) , (β) , (x) , (y) e (h) . O teorema de Pitágoras nos auxilia para cálculos da relação entre (x) , (y) e (h) quando dois destes valores são conhecidos. No caso em que é conhecido um ângulo e um destes valores (x) , (y) ou (h) , necessitamos do uso das relações do seno, cosseno e tangente. Se conhecemos um dos ângulos (α) ou (β) , usamos a relação $\alpha + \beta = 90^\circ$ para conhecer o outro ângulo. Quando nenhum ângulo é conhecido, usamos primeiro as relações do seno, cosseno e tangente para descobrir um valor numérico e usar nas funções inversas adequadas e descobrir o ângulo relacionado a esta função.

Exemplo 5.1

Dado o triângulo retângulo abaixo, determine as variáveis desconhecidas.



São conhecidos os dois catetos, $(x = 8)$ e $(y = 6)$. Logo, devemos encontrar os outros três valores: (h) , (α) e (β) . Sendo conhecidos os catetos, usando o teorema de Pitágoras determinamos o valor de (h) .

$$h^2 = x^2 + y^2$$

$$h^2 = 8^2 + 6^2$$

$$h^2 = 64 + 36$$

$$h^2 = 100$$

$$h = \sqrt{100}$$

$$\boxed{h = 10}$$

Agora determinamos (α) usando qualquer uma das relações do seno, cosseno ou tangente e, em seguida, a função inversa correspondente. Usando o seno,

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{h} = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$\text{arcsen } 0,6 = \alpha$$

$$\boxed{\alpha = 36,87^\circ}$$

Chegaríamos ao mesmo valor usando $\cos \alpha = \frac{x}{h} = 0,8$ ou $\text{tg } \alpha = \frac{y}{x} = 0,75$. Por fim, conhecendo (α) , usamos a relação $\alpha + \beta = 90^\circ$ para achar (β) :

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - 36,87^\circ$$

$$\boxed{\beta = 53,13^\circ}$$

Exemplo 5.2

Dado o triângulo retângulo abaixo, determine as variáveis desconhecidas.



São conhecidos o ângulo ($\alpha = 60^\circ$) e a hipotenusa ($h = 7$). Logo, devemos encontrar (β), (x) e (y). Sabendo (α), usando a relação $\alpha + \beta = 90^\circ$, temos

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 90^\circ \\ 60^\circ + \beta &= 90^\circ \\ \beta &= 90^\circ - 60^\circ\end{aligned}$$

$$\boxed{\beta = 30^\circ}$$

Usando as relações do seno e do cosseno, determinamos os catetos (y) e (x):

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{y}{h} \\ \sin 60^\circ &= \frac{y}{7} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \times 7 &= y \\ 0,866 \times 7 &= y\end{aligned}$$

$$\boxed{y = 6,06}$$

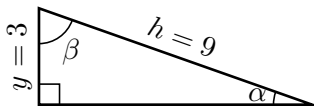
e

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{x}{h} \\ \cos 60^\circ &= \frac{x}{7} \\ \frac{1}{2} \times 7 &= x\end{aligned}$$

$$\boxed{x = 3,5}$$

Exemplo 5.3

Dado o triângulo retângulo abaixo, determine as variáveis desconhecidas.



São conhecidos o cateto ($y = 3$) e a hipotenusa ($h = 9$). Logo, devemos encontrar (α), (β) e (x). Usando o teorema de Pitágoras determinamos o valor

de (x) :

$$h^2 = x^2 + y^2$$

$$9^2 = x^2 + 3^2$$

$$81 = x^2 + 9$$

$$81 - 9 = x^2$$

$$72 = x^2$$

$$\sqrt{72} = x$$

$$x = 8,49$$

Como no primeiro exemplo, conhecendo os lados podemos usar qualquer uma das três relações (seno, cosseno ou tangente) para determinar (α) . Usando o seno,

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{h} = \frac{3}{9} \simeq 0,333$$

$$\arcsen 0,333 = \alpha$$

$$\alpha = 19,47^\circ$$

Sabendo (α) , usando a relação $\alpha + \beta = 90^\circ$, temos

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\beta = 90^\circ - 19,47^\circ$$

$$\beta = 70,53^\circ$$

5.5 Ângulos no círculo trigonométrico

Até aqui, o seno, o cosseno e a tangente só valeram para ângulos de 0° até 90° , porque foram definidos dentro de um triângulo retângulo, e num triângulo retângulo não cabe um ângulo maior do que isso. Só que, na física, vamos precisar desses valores também para ângulos maiores, como 130° ou 270° . Para dar conta desses casos, usamos uma ideia um pouco mais geral, chamada **círculo trigonométrico**.

O círculo trigonométrico é simplesmente um círculo de raio 1 desenhado bem no centro dos eixos, na origem. Para marcar um ângulo, começamos na linha horizontal (apontando para a direita) e giramos no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, até chegar ao ângulo que queremos. Onde paramos, marcamos um

ponto (P) em cima do círculo. E aqui está o pulo do gato: o quanto esse ponto está para o lado (a posição dele na horizontal) é o cosseno do ângulo, e o quanto ele está para cima ou para baixo (a posição dele na vertical) é o seno.

SENO E COSSENO NO CÍRCULO

$\cos \theta = x_P \qquad \text{sen } \theta = y_P$

(5.10)

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$\theta \rightarrow$ ângulo medido a partir do eixo horizontal
 $x_P, y_P \rightarrow$ coordenadas do ponto P sobre o círculo de raio 1

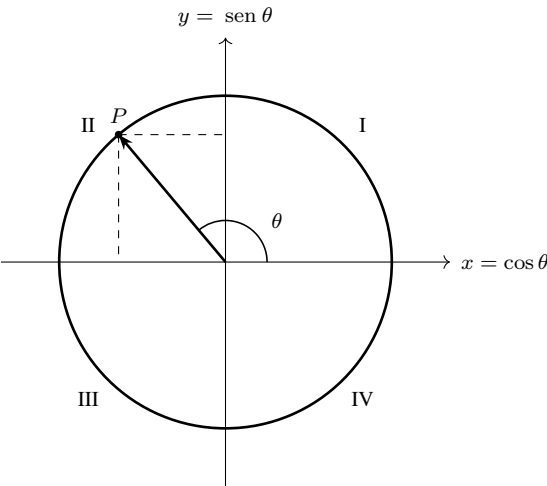


Figura 5.7: No círculo de raio 1, o cosseno é a coordenada horizontal e o seno é a coordenada vertical do ponto P . Os quatro quadrantes são numerados de I a IV.

A tangente continua sendo o seno dividido pelo cosseno, $\text{tg } \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}$. Conforme o ponto (P) vai parando em cada uma das quatro partes do círculo (que chamamos de **quadrantes** e numeramos de I a IV), o seno e o cosseno mudam de sinal, e a tangente também. A tabela abaixo mostra esses sinais.

quadrante	sen θ	cos θ	tg θ
I (entre 0° e 90°)	+	+	+
II (entre 90° e 180°)	+	−	−
III (entre 180° e 270°)	−	−	+
IV (entre 270° e 360°)	−	+	−

Os ângulos que estão exatamente sobre os eixos, como 0° , 90° , 180° e 270° , não pertencem a nenhum quadrante e devem ser analisados separadamente.

Na prática, o jeito mais rápido de achar o valor é na calculadora científica, que já dá o sinal certo: por exemplo, ela mostra $\text{sen } 130^\circ \simeq 0,77$ e $\text{cos } 210^\circ \simeq -0,87$. Mesmo assim, vale entender de onde vem o sinal, e para isso há um truque simples. Todo ângulo tem um “parente” lá entre 0° e 90° , que chamamos de **ângulo de referência**. O número do seno, do cosseno e da tangente (só o número, esquecendo

o sinal por enquanto) é o mesmo desse parente; o sinal, de mais ou de menos, a gente pega na tabela dos quadrantes.

Para achar seno, cosseno ou tangente de um ângulo qualquer: o número vem do ângulo de referência (o “parente” entre 0° e 90°) e o sinal (mais ou menos) vem do quadrante.

Exemplo 5.4

Determine o valor de $\text{sen } 150^\circ$.

O ângulo 150° está no segundo quadrante (entre 90° e 180°), onde o seno é positivo. O ângulo de referência é $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$. Logo,

$$\text{sen } 150^\circ = + \text{sen } 30^\circ = 0,5.$$

Exemplo 5.5

Determine o valor de $\cos 210^\circ$.

O ângulo 210° está no terceiro quadrante (entre 180° e 270°), onde o cosseno é negativo. O ângulo de referência é $210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$. Assim,

$$\cos 210^\circ = - \cos 30^\circ \simeq -0,87.$$

Exemplo 5.6

Quanto vale $\text{tg } 270^\circ$?

No ângulo 270° , o ponto (P) está sobre o eixo vertical, para baixo, de modo que $\cos 270^\circ = 0$ e $\text{sen } 270^\circ = -1$. Como a tangente é $\frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta}$, teríamos uma divisão por zero. Portanto, $\text{tg } 270^\circ$ não está definida. Na calculadora, isso aparece como uma mensagem de erro.

Síntese do capítulo

No triângulo retângulo, o seno, o cosseno e a tangente relacionam um ângulo com os lados do triângulo, enquanto o teorema de Pitágoras liga os três lados entre si. As funções inversas (arco-seno, arco-cosseno e arco-tangente) fornecem um ângulo principal a partir da razão. Com isso, conhecendo dois lados, ou um lado e um ângulo, conseguimos determinar todos os cinco elementos do triângulo.

Lista de exercícios 5

1. Determine o valor numérico das seguintes funções trigonométricas:

a- $\text{sen } 0^\circ =$

b- $\text{sen } 15^\circ =$

c- $\text{sen } 30^\circ =$

d- $\text{sen } 38^\circ =$

e- $\text{sen } 45^\circ =$

f- $\text{sen } 55^\circ =$

g- $\text{sen } 60^\circ =$

h- $\text{sen } 75,38^\circ =$

i- $\text{sen } 85,25^\circ =$

j- $\text{sen } 90^\circ =$

k- $\text{sen } 130^\circ =$

l- $\text{sen } 180^\circ =$

m- $\text{sen } 220^\circ =$

n- $\text{sen } 270^\circ =$

o- $\text{sen } 360^\circ =$

2. Determine o valor numérico das seguintes funções trigonométricas:

a- $\cos 0^\circ =$

b- $\cos 25^\circ =$

c- $\cos 30^\circ =$

d- $\cos 42^\circ =$

e- $\cos 45^\circ =$

f- $\cos 59^\circ =$

g- $\cos 60^\circ =$

h- $\cos 71,88^\circ =$

i- $\cos 82,62^\circ =$

j- $\cos 90^\circ =$

k- $\cos 120^\circ =$

l- $\cos 180^\circ =$

m- $\cos 255^\circ =$

n- $\cos 270^\circ =$

o- $\cos 360^\circ =$

3. Determine o valor numérico das seguintes funções trigonométricas:

a- $\operatorname{tg} 0^\circ =$

b- $\operatorname{tg} 15^\circ =$

c- $\operatorname{tg} 30^\circ =$

d- $\operatorname{tg} 38^\circ =$

e- $\operatorname{tg} 45^\circ =$

f- $\operatorname{tg} 55^\circ =$

g- $\operatorname{tg} 60^\circ =$

h- $\operatorname{tg} 75,38^\circ =$

i- $\operatorname{tg} 85,25^\circ =$

j- $\operatorname{tg} 90^\circ =$

k- $\operatorname{tg} 130^\circ =$

l- $\operatorname{tg} 180^\circ =$

m- $\operatorname{tg} 220^\circ =$

n- $\operatorname{tg} 270^\circ =$

o- $\operatorname{tg} 360^\circ =$

4. Determine o ângulo das seguintes funções inversas:

a- $\operatorname{arcsen} 0 =$

b- $\operatorname{arcsen} 0,15 =$

c- $\operatorname{arcsen} 0,5 =$

d- $\operatorname{arcsen} 0,67 =$

e- $\operatorname{arcsen} 0,707 =$

f- $\operatorname{arcsen} 0,8 =$

g- $\operatorname{arcsen} 0,866 =$

h- $\operatorname{arcsen} 0,9 =$

i- $\operatorname{arcsen} 0,95 =$

j- $\operatorname{arcsen} 1 =$

k- $\operatorname{arcsen} - 0,2 =$

l- $\operatorname{arcsen} - 0,5 =$

m- $\arcsen - 0,707 =$

n- $\arcsen - 0,866 =$

o- $\arcsen - 1 =$

5. Determine o ângulo das seguintes funções inversas:

a- $\arccos 1 =$

b- $\arccos 0,95 =$

c- $\arccos 0,866 =$

d- $\arccos 0,079 =$

e- $\arccos 0,707 =$

f- $\arccos 0,6 =$

g- $\arccos 0,5 =$

h- $\arccos 0,42 =$

i- $\arccos 0,35 =$

j- $\arccos 0 =$

k- $\arccos -0,2 =$

l- $\arccos -0,5 =$

m- $\arccos -0,707 =$

n- $\arccos -0,866 =$

o- $\arccos -1 =$

6. Determine o ângulo das seguintes funções inversas:

a- $\operatorname{arctg} 0 =$

b- $\operatorname{arctg} 0,2679 =$

c- $\operatorname{arctg} 0,577 =$

d- $\operatorname{arctg} 0,8 =$

e- $\operatorname{arctg} 1 =$

f- $\operatorname{arctg} 1,191 =$

g- $\operatorname{arctg} 1,732 =$

h- $\operatorname{arctg} 2,7474 =$

i- $\operatorname{arctg} 11,43 =$

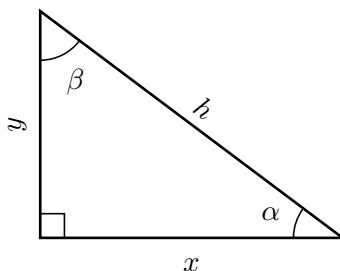
j- $\operatorname{arctg} 57,29 =$

k- $\operatorname{arctg} 150 =$

l- $\operatorname{arctg} 1000 =$

m- $\operatorname{arctg} 1.000.000.000 =$

7. Considerando o seguinte triângulo retângulo com catetos x e y , hipotenusa h e ângulos α e β . Determine as variáveis desconhecidas nas situações em que são dadas:



- a-** $x = 5$ e $y = 4$
b- $x = 12$ e $h = 20$
c- $x = 7$ e $\alpha = 30^\circ$
d- $x = 15$ e $\beta = 45^\circ$
e- $y = 8$ e $h = 12$
f- $y = 25$ e $\alpha = 60^\circ$
g- $y = 2$ e $\beta = 70^\circ$
h- $h = 150$ e $\alpha = 40^\circ$
i- $h = 30$ e $\beta = 70^\circ$
8. Diga em qual quadrante está cada ângulo e qual o sinal do seno, do cosseno e da tangente: 120° , 200° , 300° e 95° .
9. Usando o ângulo de referência, determine o valor de $\sin 150^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\operatorname{tg} 225^\circ$ e $\sin 300^\circ$.



Geometria Essencial para Física

O que você vai aprender

- Calcular áreas das principais figuras planas.
- Calcular volumes dos principais sólidos.
- Determinar a distância entre dois pontos no plano.

Por que estudamos isto? As áreas e os volumes aparecem quando estudamos pressão, empuxo e densidade; a distância entre dois pontos, quando calculamos o deslocamento de um corpo. Por isso revisamos aqui a geometria que a física de fato usa, sem nos perdermos em demonstrações que não serão necessárias.

6.1 Áreas fundamentais

Ao longo da física básica precisaremos, com muita frequência, calcular a área de uma superfície. A área aparece, por exemplo, quando estudamos pressão, em que o que importa não é apenas a força aplicada, mas também sobre qual área ela se distribui. Por isso, antes de qualquer coisa, vamos relembrar como se calcula a área das figuras planas mais comuns.

Antes de ver as fórmulas, vale olhar para as figuras. A figura 6.1 reúne as quatro figuras planas mais comuns com seus elementos; em seguida, veremos a área de cada uma.

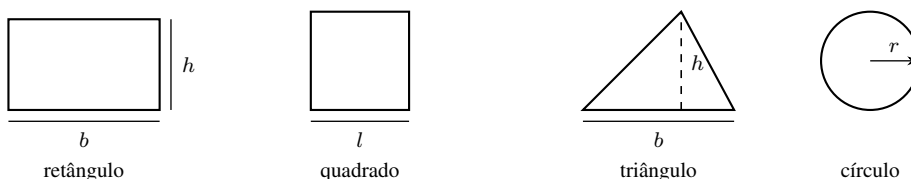


Figura 6.1: Elementos das principais figuras planas.

A área de um retângulo de base (b) e altura (h) é dada pelo produto dos dois lados,

ÁREA DO RETÂNGULO

$$A_{\text{retângulo}} = b \cdot h \quad (6.1)$$

Como o quadrado é um caso particular de retângulo, em que todos os lados têm a mesma medida (l), sua área é simplesmente

ÁREA DO QUADRADO

$$A_{\text{quadrado}} = l^2 \quad (6.2)$$

Já a área de um triângulo de base (b) e altura (h) corresponde à metade da área do retângulo que o contém, ou seja,

ÁREA DO TRIÂNGULO

$$A_{\text{triângulo}} = \frac{b \cdot h}{2}$$

(6.3)

Para o círculo de raio (r), a área é dada por

ÁREA DO CÍRCULO

$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot r^2$$

(6.4)

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$b \rightarrow$ base (retângulo/triângulo)
 $h \rightarrow$ altura (retângulo/triângulo)
 $l \rightarrow$ lado do quadrado
 $r \rightarrow$ raio do círculo
 $\pi \rightarrow$ constante $\simeq 3,14$

Essas quatro figuras já cobrem a grande maioria das situações que encontraremos, e áreas mais complexas podem quase sempre ser obtidas somando ou subtraindo áreas dessas figuras simples.

Um bom exemplo disso é o **trapézio**, uma figura de quatro lados que aparece bastante em terrenos, recipientes e peças. Ele tem dois lados paralelos: uma base maior (B) e uma base menor (b); e a altura (h) é a distância entre essas duas bases, como mostra a figura 6.2.

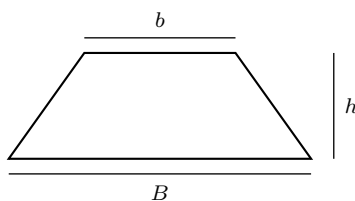


Figura 6.2: Elementos do trapézio: base maior B , base menor b e altura h .

Poderíamos achar a área do trapézio cortando-o em um retângulo e dois triângulos, mas o resultado final é fácil de guardar: a área é a média das duas bases (as duas somadas e divididas por dois) multiplicada pela altura,

ÁREA DO TRAPÉZIO

$$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b)}{2} \cdot h$$

(6.5)

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$B \rightarrow$ base maior do trapézio
 $b \rightarrow$ base menor do trapézio
 $h \rightarrow$ altura (distância entre as bases)

Exemplo 6.1

Um retângulo tem base $b = 8$ cm e altura $h = 3$ cm. Qual a sua área?

Vamos com calma. A figura é um retângulo, e a área de um retângulo é o produto da base pela altura. A base vale $b = 8$ cm e a altura $h = 3$ cm, então

$$A = b \cdot h = 8 \cdot 3 = 24.$$

Como multiplicamos centímetros por centímetros, o resultado sai em centímetros quadrados. Temos então uma área de 24 cm^2 .

Exemplo 6.2

Um quadrado tem lado $l = 7$ cm. Qual a sua área?

O quadrado tem todos os lados iguais, então sua área é o lado multiplicado por ele mesmo, ou seja, o lado ao quadrado. Com $l = 7$ cm,

$$A = l^2 = 7 \cdot 7 = 49.$$

A área do quadrado é de 49 cm^2 .

Exemplo 6.3

Qual a área de um triângulo de base $b = 10$ cm e altura $h = 6$ cm?

Aqui a figura é um triângulo. Lembre-se de que a área do triângulo é a metade da área do retângulo que o conteria, ou seja, a base vezes a altura dividido por dois. Primeiro multiplicamos base e altura:

$$b \cdot h = 10 \cdot 6 = 60.$$

Agora dividimos por dois:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{60}{2} = 30.$$

A área do triângulo é de 30 cm^2 .

Exemplo 6.4

Qual a área de um círculo de raio $r = 5$ cm? (use $\pi \simeq 3,14$)

A área do círculo é π vezes o raio ao quadrado. Primeiro elevamos o raio ao quadrado:

$$r^2 = 5^2 = 25.$$

Agora multiplicamos por π :

$$A = \pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 25 = 78,5.$$

A área do círculo é de $78,5 \text{ cm}^2$.

Exemplo 6.5

Um trapézio tem base maior $B = 10 \text{ cm}$, base menor $b = 6 \text{ cm}$ e altura $h = 4 \text{ cm}$. Qual a sua área?

A área do trapézio é a média das duas bases multiplicada pela altura. Primeiro somamos as bases e dividimos por dois:

$$\frac{B + b}{2} = \frac{10 + 6}{2} = \frac{16}{2} = 8.$$

Agora multiplicamos pela altura:

$$A = \frac{(B + b)}{2} \cdot h = 8 \cdot 4 = 32.$$

A área do trapézio é de 32 cm^2 .

6.2 Volumes essenciais

Assim como a área mede a extensão de uma superfície, o volume mede o espaço ocupado por um corpo. O volume nos será útil, por exemplo, quando estudarmos densidade, que relaciona a massa de um corpo com o volume que ele ocupa. Vejamos, então, os volumes dos sólidos mais corriqueiros.

Como antes, começemos pelas figuras. A figura 6.3 mostra os quatro sólidos mais corriqueiros com seus elementos; em seguida, veremos o volume de cada um.

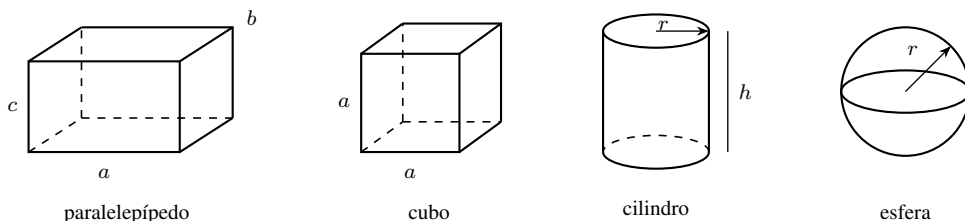


Figura 6.3: Os principais sólidos e seus elementos: paralelepípedo, cubo, cilindro e esfera.

O volume de um paralelepípedo de arestas (a) , (b) e (c) é o produto das três dimensões,

$$\text{VOLUME DO PARALELEPÍPEDO}$$

$$V_{\text{paralelepípedo}} = a \cdot b \cdot c \quad (6.6)$$

O cubo, sendo o caso particular em que as três arestas são iguais a (a) , tem volume

$$\text{VOLUME DO CUBO}$$

$$V_{\text{cubo}} = a^3 \quad (6.7)$$

O volume de um cilindro de raio da base (r) e altura (h) é a área da base multiplicada pela altura,

$$\text{VOLUME DO CILINDRO}$$

$$V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad (6.8)$$

E o volume de uma esfera de raio (r) é dado por

$$\text{VOLUME DA ESFERA}$$

$$V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad (6.9)$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$a, b, c \rightarrow$ arestas do paralelepípedo
 $a \rightarrow$ aresta do cubo
 $r \rightarrow$ raio (cilindro/esfera)
 $h \rightarrow$ altura do cilindro
 $\pi \rightarrow$ constante $\simeq 3,14$

Devemos ter claro que, em todos esses casos, o volume é medido em unidades de comprimento elevadas ao cubo, como o metro cúbico (m^3) ou o centímetro cúbico (cm^3).

Exemplo 6.6

Um paralelepípedo tem arestas $a = 4 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$ e $c = 2 \text{ cm}$. Qual o seu volume?

O volume do paralelepípedo é o produto das três arestas. Multiplicando as três medidas:

$$V = a \cdot b \cdot c = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Como multiplicamos três comprimentos, o resultado sai em centímetros cúbicos. O volume é de 24 cm^3 .

Exemplo 6.7

Um cubo tem aresta $a = 5 \text{ cm}$. Qual o seu volume?

Devagar: o cubo tem as três arestas iguais, então seu volume é a aresta elevada ao cubo, isto é, a aresta multiplicada por ela mesma três vezes. Com $a = 5 \text{ cm}$,

$$V = a^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125.$$

Como multiplicamos três comprimentos, o resultado sai em centímetros cúbicos. Temos então um volume de 125 cm^3 .

Exemplo 6.8

Um cilindro tem raio da base $r = 2 \text{ cm}$ e altura $h = 10 \text{ cm}$. Qual o seu volume? (use $\pi \simeq 3,14$)

O volume do cilindro é a área da base (um círculo) multiplicada pela altura. Vamos por partes. Primeiro a área da base:

$$A_{\text{base}} = \pi \cdot r^2 = 3,14 \cdot 2^2 = 3,14 \cdot 4 = 12,56.$$

Agora multiplicamos essa área pela altura:

$$V = A_{\text{base}} \cdot h = 12,56 \cdot 10 = 125,6.$$

O volume do cilindro é de $125,6 \text{ cm}^3$.

Exemplo 6.9

Qual o volume de uma esfera de raio $r = 3 \text{ cm}$? (use $\pi \simeq 3,14$)

O volume da esfera é $\frac{4}{3}$ vezes π vezes o raio ao cubo. Vamos por partes. Primeiro o raio ao cubo:

$$r^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27.$$

Multiplicando por π :

$$\pi \cdot r^3 = 3,14 \cdot 27 = 84,78.$$

Por fim, multiplicamos por $\frac{4}{3}$, o mesmo que multiplicar por 4 e dividir por 3:

$$V = \frac{4}{3} \cdot 84,78 = \frac{339,12}{3} = 113,04.$$

O volume da esfera é de $113,04 \text{ cm}^3$.

6.3 Distância entre dois pontos

Para encerrar, veremos como calcular a distância entre dois pontos no plano cartesiano. Esse cálculo será útil, por exemplo, para determinar o deslocamento de um corpo que se move de uma posição a outra. A ferramenta que usaremos aqui é o teorema de Pitágoras, que vimos na trigonometria.

Considere dois pontos, A de coordenadas (x_A, y_A) e B de coordenadas (x_B, y_B) . A distância entre eles pode ser pensada como a hipotenusa de um triângulo retângulo cujos catetos são as diferenças das coordenadas em (x) e em (y) . Assim, temos

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS

$$d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \quad (6.10)$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$d \rightarrow$ distância entre os pontos A e B
 $x_A, y_A \rightarrow$ coordenadas do ponto A
 $x_B, y_B \rightarrow$ coordenadas do ponto B

Note que essa expressão nada mais é do que o teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo formado pelos dois pontos, como mostra a figura 6.4. É importante perceber que a ordem em que tomamos as diferenças não altera o resultado, pois as diferenças aparecem elevadas ao quadrado. Na Física, essa distância em linha reta corresponde ao **módulo do deslocamento** entre as posições inicial e final. Ela não é necessariamente igual à **distância percorrida** pelo corpo ao longo de sua trajetória.

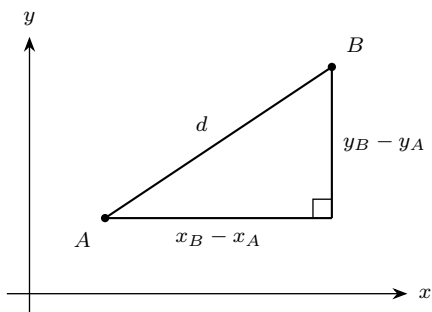


Figura 6.4: A distância d entre dois pontos é a hipotenusa de um triângulo retângulo.

Exemplo 6.10

Determine a distância entre os pontos $A(1,2)$ e $B(4,6)$.

Vamos passo a passo. A fórmula pede a diferença das coordenadas x e a diferença das coordenadas y . A diferença em x é $4 - 1 = 3$ e a diferença em y é $6 - 2 = 4$. Agora é só colocar na fórmula e resolver, uma conta por vez:

$$d = \sqrt{(4 - 1)^2 + (6 - 2)^2}$$

$$d = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$d = \sqrt{9 + 16}$$

$$d = \sqrt{25}$$

$$d = 5.$$

Temos então que a distância entre os dois pontos é 5 unidades.

Vale notar um caso particular: quando os dois pontos têm o mesmo x , como $A(2,1)$ e $B(2,5)$, a diferença em x é zero e a fórmula devolve $d = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$, ou seja, a própria diferença das alturas, como esperado para dois pontos na mesma vertical.

Síntese do capítulo

A geometria nos dá as ferramentas para medir o espaço. As áreas das figuras planas (retângulo $b \cdot h$, quadrado l^2 , triângulo $\frac{b \cdot h}{2}$ e círculo πr^2) medem superfícies e aparecem, por exemplo, no estudo da pressão. Os volumes dos sólidos (paralelepípedo $a \cdot b \cdot c$, cubo a^3 , cilindro $\pi r^2 h$ e esfera $\frac{4}{3} \pi r^3$) medem o espaço ocupado por um corpo e aparecem no estudo da densidade. A distância entre dois pontos no plano é dada pelo teorema de Pitágoras, e será útil para calcular deslocamentos.

Lista de exercícios 6

1. Calcule a área das figuras a seguir:
 - a- um quadrado de lado 6 cm;
 - b- um retângulo de base 10 cm e altura 4 cm;
 - c- um triângulo de base 8 cm e altura 5 cm;
 - d- um círculo de raio 10 cm (use $\pi \simeq 3,14$).
2. Calcule o volume dos sólidos a seguir:
 - a- um cubo de aresta 4 cm;
 - b- um paralelepípedo de arestas 2 cm, 3 cm e 5 cm;
 - c- um cilindro de raio 2 cm e altura 10 cm (use $\pi \simeq 3,14$).
3. Determine a distância entre os pontos:
 - a- $A(0,0)$ e $B(3,4)$;
 - b- $A(1,1)$ e $B(1,7)$;
 - c- $A(-2,1)$ e $B(4,9)$.
4. Uma sala retangular tem 5 m de comprimento por 4 m de largura. Qual a sua área?
5. Uma placa triangular tem base de 30 cm e altura de 20 cm. Qual a sua área?
6. Um tanque em forma de paralelepípedo tem 2 m de comprimento, 1 m de largura e 1,5 m de altura. Qual o seu volume?
7. Uma esfera tem raio 3 cm. Qual o seu volume? (use $\pi \simeq 3,14$)
8. Um terreno quadrado tem área de 100 m^2 . Qual a medida do seu lado?
9. Um corpo sai do ponto $A(2,1)$ e chega ao ponto $B(2,9)$. Qual o módulo do deslocamento entre eles?
10. Um corpo se desloca do ponto $A(0,0)$ ao ponto $B(6,8)$. Qual o módulo do seu deslocamento?



Vetores

O que você vai aprender

- Distinguir grandezas escalares de grandezas vetoriais.
- Representar um vetor por módulo, direção e sentido.
- Somar e subtrair vetores.
- Decompor vetores e trabalhar com os vetores unitários.

Por que estudamos isto? Chegamos a uma das ferramentas mais importantes e, ao mesmo tempo, uma das menos vistas na matemática da escola: os vetores. Muitas grandezas da física, como a força, a velocidade e a aceleração, só ficam completas quando informamos também a direção e o sentido. Dominar vetores agora é o que vai permitir entender essas grandezas mais adiante.

Aqui seu mundo mudará sem chance de retorno. Quando falamos de vetores, nem sempre $2 + 2$ será 4: dois vetores de módulo 2 podem produzir um vetor de módulo diferente de 4, pois o resultado depende também de suas direções e sentidos. Até este momento, seu conhecimento matemático levava em conta a matemática escalar, ou seja, onde somente a informação a respeito do valor numérico é o suficiente. Quando falamos em vetores, além de um valor numérico associado ao mesmo, precisamos de mais duas informações: direção e sentido.

7.1 Grandezas vetoriais

Uma **grandeza escalar** fica completamente determinada por um único número (acompanhado de sua unidade). A massa de um corpo, a temperatura de uma sala ou o tempo de uma viagem são exemplos de grandezas escalares: basta o valor numérico para que a informação esteja completa. Já uma **grandeza vetorial** precisa de três informações para ficar bem definida. Podemos definir um vetor como sendo então

Vetor é um ente matemático que fica definido por completo quando conhecidos seu **módulo** (valor numérico), sua **direção** e seu **sentido**.

7.2 Módulo, direção e sentido

Para identificar um vetor nos livros, é comum usar uma flecha acima da letra que o caracteriza, ou então escrever essa letra em negrito. Por exemplo, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$ ou **a**, **b**, **x**. Neste livro será usada a notação com a flecha. Logo, sempre que alguma grandeza for um vetor, terá acima da letra que a designa uma flecha (essa flecha acima da letra não tem nenhuma relação com a direção e o sentido deste vetor). A direção do vetor, na forma geométrica, é indicada por uma linha, o sentido por

uma seta ($>$ ou $<$) e o módulo está associado ao tamanho desta linha, como nos exemplos abaixo.

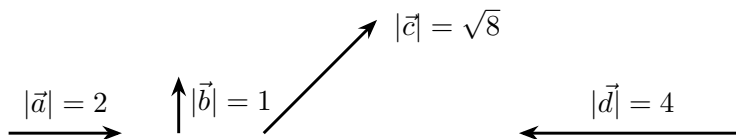


Figura 7.1: Exemplos de quatro vetores distintos.

Note que na figura 7.1 temos quatro vetores de módulos diferentes. Podemos ver que o tamanho de cada vetor está associado ao valor de seu módulo. Temos dois vetores na direção horizontal ($\vec{a}$ e $\vec{d}$), um na vertical ($\vec{b}$) e um oblíquo ($\vec{c}$). Podemos notar que, mesmo estando na mesma direção, os vetores $\vec{a}$ e $\vec{d}$ possuem módulos e sentidos diferentes. É importante saber diferenciar direção e sentido. A **direção** corresponde à orientação da linha sobre a qual o vetor atua, podendo ser horizontal, vertical ou inclinada (oblíqua). Já o **sentido** indica para qual lado dessa direção o vetor aponta e é mostrado pela seta.

A matemática associada aos vetores não é exatamente igual à matemática associada aos escalares. Sendo assim, precisamos aprender as operações básicas com vetores.

7.3 Soma e diferença

7.3.1 Soma pelo método geométrico

Para somar vetores com o método geométrico, simplesmente colocamos um vetor na sequência do outro. Para isso, vamos designar a origem e a extremidade de um vetor. A **origem** será o início do vetor, ou seja, o lado onde não há seta ($>$ ou $<$). Já a **extremidade** será o lado do vetor onde há uma seta.

ORIGEM $\longrightarrow$ EXTREMIDADE

Logo, para somar, colocamos a origem de um vetor na extremidade de outro, até o fim da soma. O vetor resultante, que chamaremos de **vetor soma** $\vec{S}$, será dado como o vetor que liga a origem do primeiro vetor até a extremidade do último. Por exemplo, dados os vetores abaixo

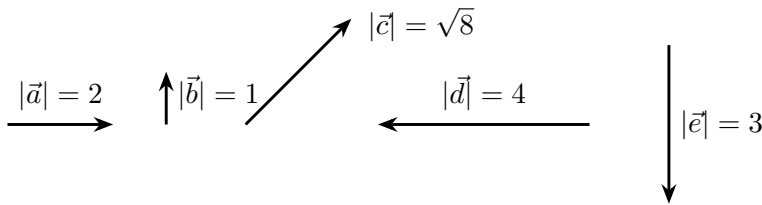
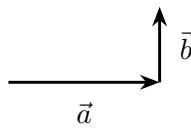


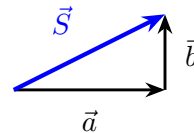
Figura 7.2: Exemplos de cinco vetores distintos.

Temos que, para somar $\vec{a}$ e $\vec{b}$, primeiro colocamos um vetor na sequência do outro

Figura 7.3: Soma dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

O vetor soma $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b}$ será o vetor que liga a origem do primeiro à extremidade do último. Para calcular o módulo, devemos perceber que os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são perpendiculares. Por isso, o triângulo formado é retângulo e $\vec{S}$ é sua hipotenusa. Desta forma, aplicando a equação de Pitágoras, temos

$$\begin{aligned} S^2 &= a^2 + b^2 \\ S^2 &= 2^2 + 1^2 \\ S^2 &= 5 \end{aligned}$$

Figura 7.4: Vetor $\vec{S}$ resultante da soma de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

$$\boxed{S = \sqrt{5}}$$

Como dito no início desta seção, a soma de um vetor $\vec{a}$ de módulo 2 e um vetor $\vec{b}$ de módulo 1 não é simplesmente $2 + 1 = 3$, e sim resulta em um vetor cujo módulo é $\sqrt{5}$. A soma geométrica de vetores é dada, então, pela busca do vetor resultante e por uma análise da melhor forma de calcular o mesmo.

Quando ambos os vetores estão na mesma direção, a soma segue uma lógica simples. Por exemplo, somando $\vec{S} = \vec{a} + \vec{d}$, em que $\vec{a}$ tem módulo 2 (para a direita) e $\vec{d}$ tem módulo 4 (para a esquerda), colocamos a origem de $\vec{d}$ na extremidade de $\vec{a}$. Para facilitar a visualização, apresentamos os vetores com um pequeno deslocamento.

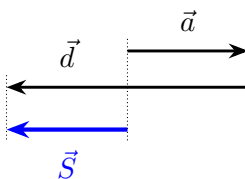


Figura 7.5: Soma $\vec{S} = \vec{a} + \vec{d}$ de vetores na mesma direção.

Para analisar o módulo do vetor $\vec{S}$, devemos notar que o vetor $\vec{a}$ foi 2 para a direita e o vetor $\vec{d}$ foi 4 para a esquerda, resultando em um módulo de $|\vec{S}| = 2$ para a esquerda.

No próximo exemplo faremos a soma $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{d} + \vec{e}$. Seguindo a lógica de ir colocando um vetor na sequência do outro, teremos

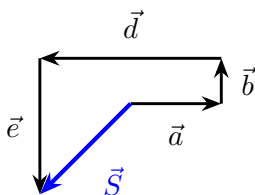


Figura 7.6: Soma dos vetores $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d} + \vec{e}$.

Olhando com atenção, notamos que as resultantes horizontal e vertical são perpendiculares e, por isso, o vetor $\vec{S}$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo, se levarmos em consideração que um cateto é a soma $\vec{a} + \vec{d}$ (módulo 2) e o outro cateto a soma $\vec{b} + \vec{e}$ (módulo 2). Aplicando a equação de Pitágoras, temos

$$S^2 = 2^2 + 2^2$$

$$S^2 = 8$$

$$S = \sqrt{8}$$

Algo importante de se notar é que o resultado independe da ordem em que os vetores são somados. O vetor soma terá sempre o mesmo módulo, direção e sentido. O resultado seria idêntico, por exemplo, se fizéssemos $\vec{S} = \vec{a} + \vec{d} + \vec{b} + \vec{e}$ ou $\vec{S} = \vec{e} + \vec{d} + \vec{b} + \vec{a}$.

7.3.2 Subtração pelo método geométrico

Na subtração de vetores pelo método geométrico, a única diferença em relação à soma é que o sinal negativo (−) significa que o vetor em questão estará com o sentido invertido. Ou seja, o vetor $-\vec{a}$ tem o mesmo módulo e a mesma direção, mas sentido inverso ao vetor $\vec{a}$.

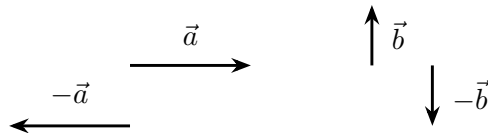
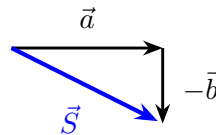


Figura 7.7: Vetores positivos e seus respectivos negativos.

Logo, devemos pensar que, ao subtrair um vetor, estaremos simplesmente somando o vetor inverso. Assim, segue-se a mesma lógica da soma de vetores pelo método geométrico. Por exemplo, para fazer a operação $\vec{S} = \vec{a} - \vec{b}$, primeiro colocamos um vetor na sequência do outro e, depois, traçamos o vetor $\vec{S}$, com sua origem saindo do primeiro vetor ($\vec{a}$) e sua extremidade na extremidade do último vetor ($-\vec{b}$).

Também neste caso, $\vec{a}$ e $-\vec{b}$ são perpendiculares. Portanto, o triângulo formado é retângulo e podemos aplicar o teorema de Pitágoras. Para outros ângulos, existem métodos mais gerais, que serão estudados em outro momento.

$$\begin{aligned} S^2 &= a^2 + b^2 \\ S^2 &= 2^2 + 1^2 \\ S^2 &= 5 \end{aligned}$$

Figura 7.8: Vetor $\vec{S}$ resultante da operação $\vec{a} - \vec{b}$.

$$S = \sqrt{5}$$

É importante salientar aqui que $\vec{S} = \vec{a} - \vec{b}$ é diferente de $\vec{S} = \vec{b} - \vec{a}$. Porém, $\vec{S} = \vec{a} - \vec{b}$ é igual a $\vec{S} = -\vec{b} + \vec{a}$.

7.4 Componentes e decomposição

Até este momento não fizemos nenhuma operação de soma ou subtração com vetores oblíquos. Somando um vetor oblíquo, até poderíamos determinar a direção e o sentido de um vetor resultante usando o método geométrico, mas a determinação do seu módulo não seria tão simples, pois nem sempre conseguimos identificar os catetos do triângulo retângulo do qual o resultante seria a hipotenusa.

Para resolver este problema, vamos aprender a decompor um vetor em suas componentes horizontal e vertical. Ou seja, **simplesmente dividimos qualquer vetor oblíquo em dois vetores cuja soma recai novamente no vetor que dividimos**. Para isso, faremos uso do plano cartesiano: a projeção do vetor nos eixos x e y fornece, respectivamente, suas componentes horizontal e vertical.

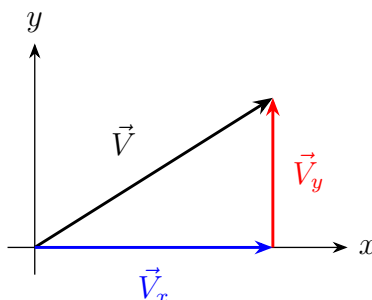


Figura 7.9: Decomposição de um vetor $\vec{V}$ nas componentes $\vec{V}_x$ e $\vec{V}_y$.

Vemos que novamente recaímos em um triângulo retângulo. Em situações nas quais, além do módulo, também conhecemos a angulação do vetor, podemos, com o uso das funções seno e cosseno, descobrir suas componentes. Quando o ângulo θ é medido a partir do sentido positivo do eixo x , as componentes escalares são

COMPONENTES ESCALARES
 $V_x = V \cos \theta; \quad V_y = V \sin \theta.$

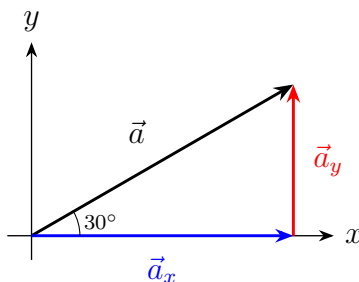
(7.1)

Os sinais aparecem de acordo com o quadrante e indicam o sentido de cada componente. Repare que a soma de $\vec{V}_x$ e $\vec{V}_y$ recai no vetor $\vec{V}$, ou seja, $\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$.

Não devemos confundir: $b_x = -1,5$ é a **componente escalar**; $|b_x| = 1,5$ é o **módulo dessa componente**; e $\vec{b}_x = -1,5 \hat{i}$ é o **vetor componente horizontal**.

Exemplo 7.1

Decomponha o vetor $\vec{a}$, de módulo $|\vec{a}| = 5$ e ângulo $\theta = 30^\circ$ em relação à horizontal, em suas componentes $\vec{a}_x$ e $\vec{a}_y$.



Usando a equação do seno, temos

$$\sin 30^\circ = \frac{a_y}{a}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{a_y}{5}$$

$$a_y = 5 \cdot \frac{1}{2}$$

$$a_y = 2,5$$

Usando a equação do cosseno, temos

$$\cos 30^\circ = \frac{a_x}{a}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a_x}{5}$$

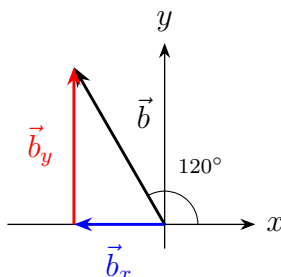
$$a_x = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a_x \simeq 4,33$$

Logo, o vetor $\vec{a}$ foi decomposto em $\vec{a}_x$ e $\vec{a}_y$, de modo que $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$. Como ambas as componentes são positivas, $\vec{a}_x \simeq 4,33 \hat{i}$, $\vec{a}_y = 2,5 \hat{j}$ e $\vec{a} \simeq 4,33 \hat{i} + 2,5 \hat{j}$.

Exemplo 7.2

Decomponha o vetor $\vec{b}$, de módulo $|\vec{b}| = 3$ e ângulo $\theta = 120^\circ$ em relação à horizontal.



O ângulo informado está em relação ao sentido positivo do eixo x . Como o vetor está no segundo quadrante, sua componente horizontal aponta para a esquerda e deve ser negativa, enquanto a vertical aponta para cima e é positiva. Usando diretamente o ângulo 120° , temos

$$b_x = 3 \cos 120^\circ = -1,5,$$

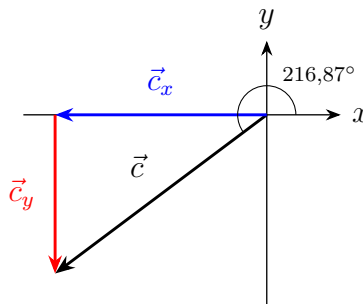
$$b_y = 3 \operatorname{sen} 120^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2} \simeq 2,6.$$

A projeção horizontal tem módulo $|b_x| = 1,5$, mas aponta para a esquerda. Portanto, $\vec{b}_x = -1,5 \hat{i}$, $\vec{b}_y \simeq 2,6 \hat{j}$ e

$$\vec{b} = -1,5 \hat{i} + 2,6 \hat{j}.$$

Exemplo 7.3

Decomponha o vetor $\vec{c}$, de módulo $|\vec{c}| = 5$ e ângulo $\theta = 216,87^\circ$ em relação à horizontal.



O vetor está no terceiro quadrante, de modo que suas duas componentes são negativas. Usando diretamente o ângulo medido a partir do sentido positivo do eixo x , temos

$$c_x = 5 \cos 216,87^\circ \simeq -4,$$

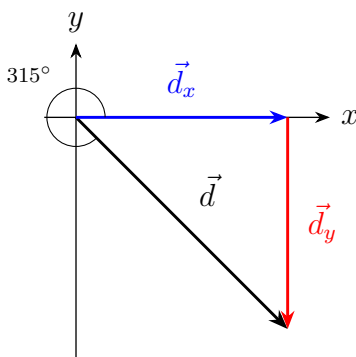
$$c_y = 5 \operatorname{sen} 216,87^\circ \simeq -3.$$

Logo, $\vec{c}_x \simeq -4 \hat{i}$, $\vec{c}_y \simeq -3 \hat{j}$ e

$$\vec{c} \simeq -4 \hat{i} - 3 \hat{j}.$$

Exemplo 7.4

Decomponha o vetor $\vec{d}$, de módulo $|\vec{d}| = 4\sqrt{2}$ e ângulo $\theta = 315^\circ$ em relação à horizontal.



O vetor está no quarto quadrante. Assim, sua componente horizontal é positiva e a vertical é negativa. Usando o ângulo 315° , temos

$$d_x = 4\sqrt{2} \cos 315^\circ = 4,$$

$$d_y = 4\sqrt{2} \sin 315^\circ = -4.$$

Portanto, $\vec{d}_x = 4\hat{i}$, $\vec{d}_y = -4\hat{j}$ e

$$\boxed{\vec{d} = 4\hat{i} - 4\hat{j}}.$$

7.5 Vetores unitários

Agora que já sabemos decompor vetores, vamos conhecer uma técnica em que não precisaremos mais de formas geométricas para trabalhar com eles. Vamos usar a informação de direção por meio dos vetores unitários $\hat{i}$ e $\hat{j}$, e o sinal (positivo ou negativo) do vetor unitário estará relacionado ao sentido.

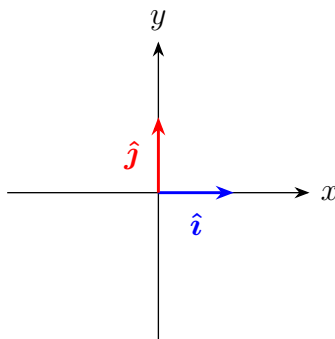


Figura 7.10: Vetores unitários $\hat{i}$ e $\hat{j}$.

Conforme o próprio nome diz, um **vetor unitário** tem módulo igual a 1 unidade.

A direção horizontal é informada pelo vetor unitário $\hat{i}$, ao passo que a direção vertical está associada ao vetor unitário $\hat{j}$. O sentido depende do sinal: para a direita $\hat{i}$, para a esquerda $-\hat{i}$; para cima $\hat{j}$, para baixo $-\hat{j}$. Isso vale para as coordenadas tomadas como na figura 7.10; se o sistema de coordenadas tiver outra orientação, os vetores unitários respeitarão essas mudanças.

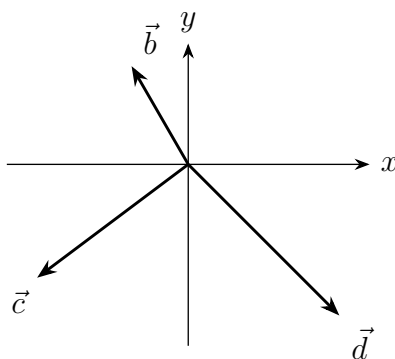
Como exemplo, retomemos o vetor $\vec{a}$ de módulo $|\vec{a}| = 5$ e ângulo 30° . Suas componentes escalares, calculadas anteriormente, são $a_x \simeq 4,33$ e $a_y = 2,5$. Os vetores componentes são $\vec{a}_x \simeq 4,33 \hat{i}$ e $\vec{a}_y = 2,5 \hat{j}$. Sendo $\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$, temos

$$\vec{a} = 4,33 \hat{i} + 2,5 \hat{j}.$$

Note que, se apenas lhe fosse apresentado o vetor $\vec{a}$ na forma $\vec{a} = 4,33 \hat{i} + 2,5 \hat{j}$, você poderia concluir que ele é composto por uma parte horizontal ($\hat{i}$) de valor 4,33 e uma parte vertical ($\hat{j}$) de valor 2,5.

Exemplo 7.5

Escreva os vetores $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ representados abaixo em termos dos vetores unitários $\hat{i}$ e $\hat{j}$ e determine seus módulos.



a) $\vec{b} = -1,5 \hat{i} + 2,6 \hat{j}$, com módulo

$$b = \sqrt{(1,5)^2 + (2,6)^2} \simeq 3.$$

b) $\vec{c} = -4 \hat{i} - 3 \hat{j}$, com módulo

$$c = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

c) $\vec{d} = 4 \hat{i} - 4 \hat{j}$, com módulo

$$d = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}.$$

Sabendo agora como decompor vetores oblíquos e entendendo a lógica dos ve-

tores unitários, podemos realizar somas e subtrações sem a necessidade de desenho geométrico. Basta entender que podemos somar tudo o que estiver em uma mesma direção, e o vetor resultante será a soma dos resultados em cada direção. Embora o desenho não seja necessário, ele continua sendo apropriado para visualizar o vetor resultante.

Exemplo 7.6

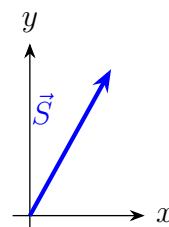
Considerando os vetores $\vec{a} = 4,33\hat{i} + 2,5\hat{j}$, $\vec{b} = -1,5\hat{i} + 2,6\hat{j}$, $\vec{c} = -4\hat{i} - 3\hat{j}$ e $\vec{d} = 4\hat{i} - 4\hat{j}$, efetue as operações solicitadas.

a) $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b}$

$$\vec{S} = (4,33\hat{i} + 2,5\hat{j}) + (-1,5\hat{i} + 2,6\hat{j})$$

$$\vec{S} = (4,33 - 1,5)\hat{i} + (2,5 + 2,6)\hat{j}$$

$$\vec{S} = 2,83\hat{i} + 5,1\hat{j}$$



b) $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

$$\vec{S} = (4,33 - 1,5 - 4 + 4)\hat{i} + (2,5 + 2,6 - 3 - 4)\hat{j}$$

$$\vec{S} = 2,83\hat{i} - 1,9\hat{j}$$

c) $\vec{S} = \vec{a} - \vec{d}$

$$\vec{S} = (4,33 - 4)\hat{i} + (2,5 - (-4))\hat{j}$$

$$\vec{S} = 0,33\hat{i} + 6,5\hat{j}$$

d) $\vec{S} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} + \vec{d}$

$$\vec{S} = (-4,33 - 1,5 + 4 + 4)\hat{i} + (-2,5 + 2,6 + 3 - 4)\hat{j}$$

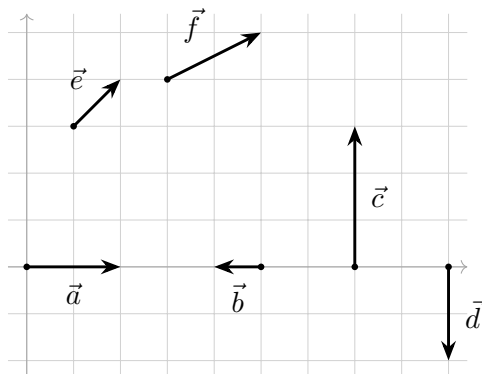
$$\vec{S} = 2,17\hat{i} - 0,9\hat{j}$$

Síntese do capítulo

Uma grandeza vetorial precisa de módulo, direção e sentido. Vetores podem ser somados e subtraídos geometricamente ou por suas componentes. A decomposição e os vetores unitários $\hat{i}$ e $\hat{j}$ permitem fazer essas operações sem depender do desenho, ferramenta que usaremos no restante de nossos estudos.

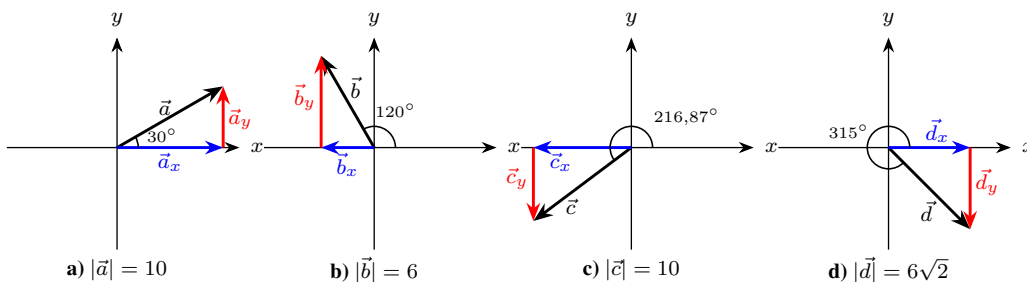
Lista de exercícios 7

1. Explique a diferença entre um vetor e um escalar.
2. Desenhe o vetor soma das operações vetoriais solicitadas abaixo, pelo método geométrico, e determine o valor do módulo do vetor soma (dica: use o papel milimetrado do fim da lista).

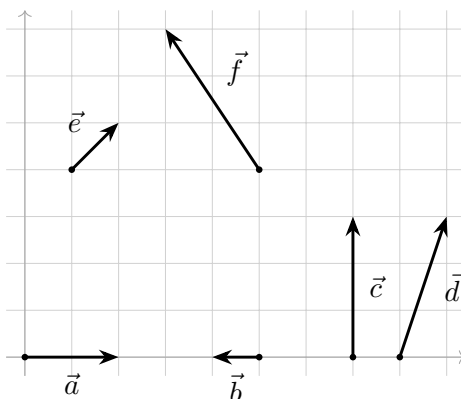


- a) $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b}$
- b) $\vec{S} = \vec{a} + \vec{c}$
- c) $\vec{S} = \vec{b} + \vec{c}$
- d) $\vec{S} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{d}$
- e) $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$
- f) $\vec{S} = \vec{a} + \vec{e}$
- g) $\vec{S} = \vec{d} + \vec{f}$
- h) $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f}$
- i) $\vec{S} = \vec{a} - \vec{b}$
- j) $\vec{S} = -\vec{a} + \vec{c}$
- k) $\vec{S} = -\vec{a} - \vec{d}$
- l) $\vec{S} = \vec{b} - \vec{c}$
- m) $\vec{S} = \vec{b} - \vec{c} + \vec{d}$
- n) $\vec{S} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} - \vec{d}$
- o) $\vec{S} = \vec{a} - \vec{e}$
- p) $\vec{S} = -\vec{d} - \vec{f}$
- q) $\vec{S} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d} - \vec{e} - \vec{f}$

3. Decomponha os vetores representados abaixo em suas componentes horizontal e vertical, utilizando as funções seno e cosseno. Considere o ângulo medido a partir do sentido positivo do eixo horizontal.



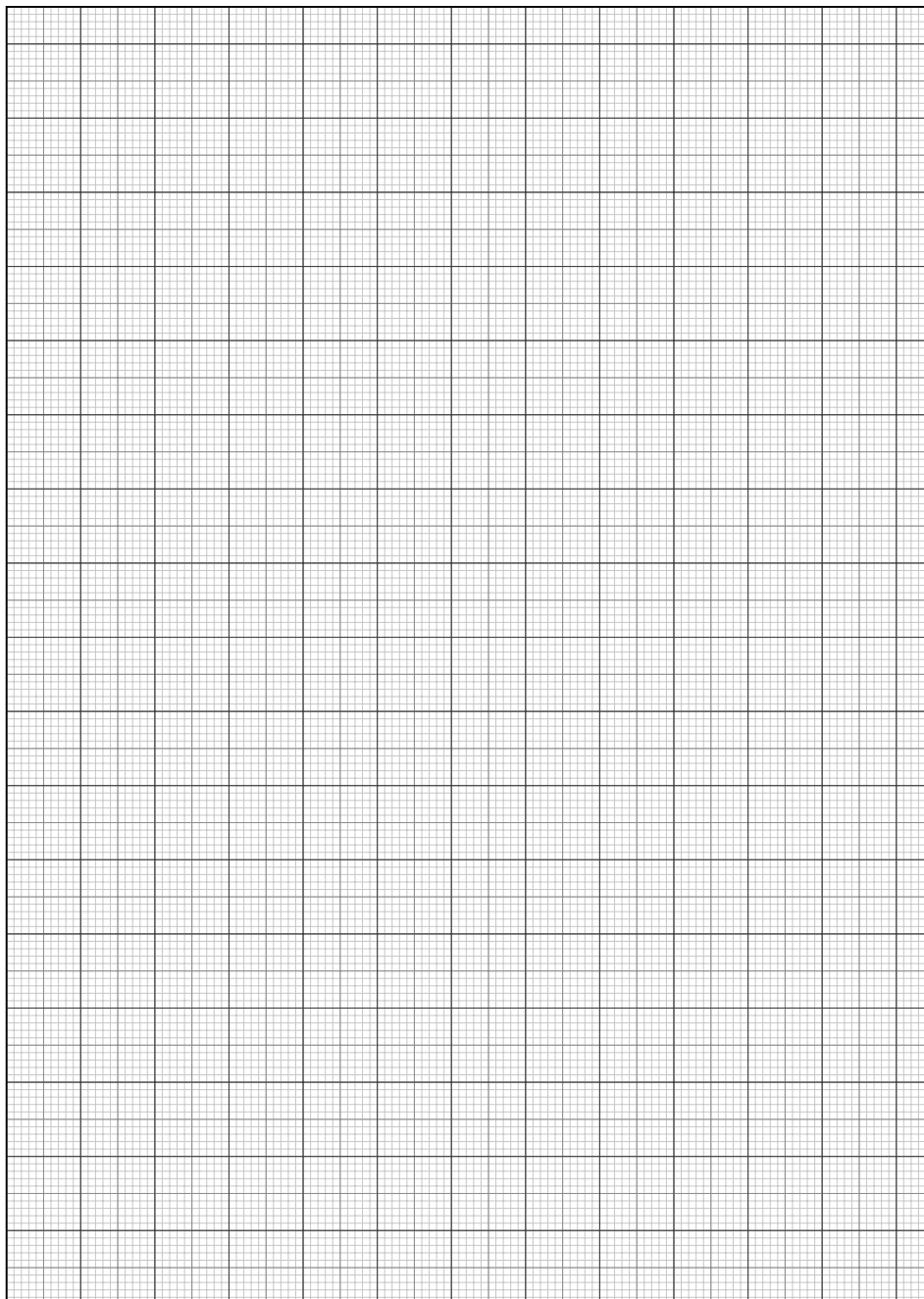
4. Usando as componentes encontradas no exercício anterior e levando em conta seus sentidos, escreva os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ em termos dos vetores unitários $\hat{i}$ e $\hat{j}$.
5. Dados os vetores apresentados abaixo, descreva-os em termos dos vetores unitários $\hat{i}$ e $\hat{j}$ e faça as operações solicitadas usando o método dos vetores unitários.



- a) $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b}$
 b) $\vec{S} = \vec{a} + \vec{c}$
 c) $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$
 d) $\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} + \vec{f}$
 e) $\vec{S} = \vec{a} - \vec{b}$
 f) $\vec{S} = -\vec{b} - \vec{c} + \vec{d}$
 g) $\vec{S} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} - \vec{d} - \vec{e} - \vec{f}$

Papel milimetrado

Use a malha abaixo para resolver os exercícios de vetores pelo método geométrico. Imprima quantas cópias precisar.





Gabarito

Reunimos aqui as respostas de todos os exercícios do volume, inclusive as dos exercícios de valor direto (feitos para praticar o uso da calculadora). Os valores trigonométricos estão arredondados para duas casas e os ângulos das funções inversas são aproximados.

Capítulo 1: Operações Matemáticas Fundamentais

1.

a) $\Delta S = S - S_0$; $S = \Delta S + S_0$; $S_0 = S - \Delta S$.

b) $\Delta v = v - v_0$; $v = \Delta v + v_0$; $v_0 = v - \Delta v$.

c) $\Delta t = t - t_0$; $t = \Delta t + t_0$; $t_0 = t - \Delta t$.

d) $v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$; $\Delta S = v_m \cdot \Delta t$; $\Delta t = \frac{\Delta S}{v_m}$.

e) $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$; $\Delta v = a_m \cdot \Delta t$; $\Delta t = \frac{\Delta v}{a_m}$.

f) $v = \frac{S - S_0}{t}$; $S = v \cdot t + S_0$; $S_0 = S - v \cdot t$; $t = \frac{S - S_0}{v}$.

g) $a = \frac{v - v_0}{t}$; $v = a \cdot t + v_0$; $v_0 = v - a \cdot t$; $t = \frac{v - v_0}{a}$.

h) $v = \pm \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta S}$; $v_0 = \pm \sqrt{v^2 - 2 \cdot a \cdot \Delta S}$; $a = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot \Delta S}$; $\Delta S = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot a}$.

i) $a_c = \frac{v^2}{R}$; $v = \sqrt{a_c \cdot R}$; $R = \frac{v^2}{a_c}$.

j) $v = \omega \cdot R$; $\omega = \frac{v}{R}$; $R = \frac{v}{\omega}$.

2. a) $x = 4$, $y = 2$; b) $x = 1$, $y = 3$; c) $x = 2$, $y = 4$, $z = -2$.

Capítulo 2: Razões, Proporções e Regra de Três

1. a) 3; b) 5; c) $3/4$. 2. a) $x = 20$; b) $x = 7$; c) $x = 6$. 3. a) inversa; b) direta. 4. R\$ 32,00. 5. 4 h. 6. 15 dias. 7. a) 30; b) 20. 8. R\$ 100,00. 9. 70%. 10. 12 km. 11. 3 cm.

Capítulo 3: Notação Científica e Ordem de Grandeza

1. **b)** $1500 \times 10^{-2} = 0,15 \times 10^2$; **c)** $300 \times 10^{-2} = 0,03 \times 10^2$; **d)** $20.000 \times 10^{-2} = 2 \times 10^2$; **e)** $50 \times 10^{-2} = 0,005 \times 10^2$; **f)** $6 \times 10^{-2} = 0,0006 \times 10^2$; **g)** $10.000 \times 10^{-2} = 1 \times 10^2$; **h)** $11.300 \times 10^{-2} = 1,13 \times 10^2$; **i)** $45 \times 10^{-2} = 0,0045 \times 10^2$; **j)** $0,04567 \times 10^{-2} = 0,000004567 \times 10^2$.

2. **b)** 500; **c)** 0,00025; **d)** 51,2; **e)** 12.200.000; **f)** 0,525; **g)** 0,12845; **h)** 0,0000458765; **i)** 234.000; **j)** 2.500.200.000.

3. **b)** $2,565555 \times 10^{-6}$; **c)** $2,6500357 \times 10^9$; **d)** $3,00672 \times 10^3$; **e)** $1,00277 \times 10^3$; **f)** $3,00125 \times 10^{-3}$; **g)** $1,04767 \times 10^2$; **h)** $4,3500009 \times 10^{-11}$; **i)** $2,317 \times 10^5$; **j)** $4,567002 \times 10^{18}$.

4. **b)** $1,35 \times 10^{-6}$; **c)** $4,59 \times 10^6$; **d)** $3,35 \times 10^3$; **e)** $1,35 \times 10^5$; **f)** $9,48 \times 10^{-3}$; **g)** $1,14 \times 10^2$; **h)** $2,35 \times 10^{-11}$; **i)** $2,39 \times 10^5$; **j)** $9,57 \times 10^{23}$.

5. Ordem de grandeza. **a)** 10^7 ; **b)** 10^{-8} ; **c)** 10^4 ; **d)** 10^3 ; **e)** 10^{-3} ; **f)** 10^5 ; **g)** 10^6 ; **h)** $3,4 \times 10^5 \Rightarrow 10^6$; **i)** $3 \times 10^9 \Rightarrow 10^9$; **j)** 10 ordens de grandeza.

6. Operações. **a)** $2,5 \times 10^7$; **b)** $3,86 \times 10^{-3}$; **c)** $7,98 \times 10^9$; **d)** $-7,98 \times 10^{-11}$; **e)** $1,28 \times 10^{34}$; **f)** $2,53 \times 10^{-5}$; **g)** 2×10^3 ; **h)** -3×10^{32} ; **i)** $3,6 \times 10^9$; **j)** $-3,2 \times 10^{-29}$; **k)** 2×10^4 ; **l)** 5×10^4 ; **m)** 500; **n)** 1.

Capítulo 4: Funções e Gráficos para Física

1. **a)** 5 m; **b)** 11 m; **c)** 20 m. **2.** independente: t ; dependente: S . **3.** **a)** $y = -2$; **b)** $y = 4$; **c)** $y = 13$. **4.** $y = 4x + 1$. **5.** $y = -5x - 2$. **6.** **a)** $y = 6$; **b)** $x = 2$ e $x = 3$. **7.** $y = -1$; menor valor (vértice), pois $a > 0$. **8.** **a)** (0, 0); **b)** (3, 1); **c)** (2, 4). **9.** no ponto -1. **10.** $S_0 = 4$ m e $v = 2$ m/s. **11.** a velocidade; no mesmo gráfico e nas mesmas escalas, maior inclinação crescente indica maior velocidade positiva. **12.** 2 m/s. **13.** 15 m. **14.** **a)** $y = 8$; **b)** $x = 2$ e $x = 4$. **15.** 12 m. **16.** $S_0 = 10$ m, $v = -2$ m/s; inicialmente aproxima-se da origem, passa por ela em $t = 5$ s e depois segue no sentido negativo, afastando-se. **17.** $v = 1$ m/s. **18.** área $= \frac{4 \times 2}{2} = 4$ m.

Capítulo 5: Trigonometria Essencial para Física

1. Seno. **a)** 0,00; **b)** 0,26; **c)** 0,50; **d)** 0,62; **e)** 0,71; **f)** 0,82; **g)** 0,87; **h)** 0,97; **i)** 1,00; **j)** 1,00; **k)** 0,77; **l)** 0,00; **m)** -0,64; **n)** -1,00; **o)** 0,00.

2. Cosseno. **a)** 1,00; **b)** 0,91; **c)** 0,87; **d)** 0,74; **e)** 0,71; **f)** 0,52; **g)** 0,50; **h)** 0,31; **i)** 0,13; **j)** 0,00; **k)** -0,50; **l)** -1,00; **m)** -0,26; **n)** 0,00; **o)** 1,00.

3. Tangente. **a)** 0,00; **b)** 0,27; **c)** 0,58; **d)** 0,78; **e)** 1,00; **f)** 1,43; **g)** 1,73; **h)**

3,83; **i)** 12,03; **j)** não definida; **k)** $-1,19$; **l)** 0,00; **m)** 0,84; **n)** não definida; **o)** 0,00.

4. Arco-seno. **a)** 0° ; **b)** $8,63^\circ$; **c)** 30° ; **d)** $42,07^\circ$; **e)** 45° ; **f)** $53,13^\circ$; **g)** 60° ; **h)** $64,16^\circ$; **i)** $71,81^\circ$; **j)** 90° ; **k)** $-11,54^\circ$; **l)** -30° ; **m)** -45° ; **n)** -60° ; **o)** -90° .

5. Arco-cosseno. **a)** 0° ; **b)** $18,19^\circ$; **c)** 30° ; **d)** $85,47^\circ$; **e)** 45° ; **f)** $53,13^\circ$; **g)** 60° ; **h)** $65,17^\circ$; **i)** $69,51^\circ$; **j)** 90° ; **k)** $101,54^\circ$; **l)** 120° ; **m)** 135° ; **n)** 150° ; **o)** 180° .

6. Arco-tangente. **a)** 0° ; **b)** 15° ; **c)** 30° ; **d)** $38,66^\circ$; **e)** 45° ; **f)** $49,98^\circ$; **g)** 60° ; **h)** 70° ; **i)** 85° ; **j)** 89° ; **k)** $89,62^\circ$; **l)** $89,94^\circ$; **m)** $\arctg(10^9) \simeq 90^\circ$ (muito próximo, mas não exatamente 90°).

7. Resolução do triângulo retângulo (x, y catetos; h hipotenusa). **a)** $h = 6,40$, $\alpha = 38,66^\circ$, $\beta = 51,34^\circ$; **b)** $y = 16$, $\alpha = 53,13^\circ$, $\beta = 36,87^\circ$; **c)** $y = 4,04$, $h = 8,08$, $\beta = 60^\circ$; **d)** $y = 15$, $h = 21,21$, $\alpha = 45^\circ$; **e)** $x = 8,94$, $\alpha = 41,81^\circ$, $\beta = 48,19^\circ$; **f)** $x = 14,43$, $h = 28,87$, $\beta = 30^\circ$; **g)** $x = 5,49$, $h = 5,85$, $\alpha = 20^\circ$; **h)** $x = 114,91$, $y = 96,42$, $\beta = 50^\circ$; **i)** $x = 28,19$, $y = 10,26$, $\alpha = 20^\circ$.

8. Quadrantes e sinais. 120° : II quadrante, $\sin +$, $\cos -$, $\tg -$; 200° : III, $\sin -$, $\cos -$, $\tg +$; 300° : IV, $\sin -$, $\cos +$, $\tg -$; 95° : II, $\sin +$, $\cos -$, $\tg -$.

9. Ângulo de referência. $\sin 150^\circ = 0,50$; $\cos 120^\circ = -0,50$; $\tg 225^\circ = 1,00$; $\sin 300^\circ = -0,87$.

Capítulo 6: Geometria Essencial para Física

1. **a)** 36 cm^2 ; **b)** 40 cm^2 ; **c)** 20 cm^2 ; **d)** 314 cm^2 . **2.** **a)** 64 cm^3 ; **b)** 30 cm^3 ; **c)** $125,6 \text{ cm}^3$. **3.** **a)** 5; **b)** 6; **c)** 10. **4.** 20 m^2 . **5.** 300 cm^2 . **6.** 3 m^3 . **7.** $\simeq 113,0 \text{ cm}^3$. **8.** 10 m. **9.** 8. **10.** 10.

Capítulo 7: Vetores

1. Uma grandeza escalar fica definida por um valor numérico e uma unidade. Uma grandeza vetorial precisa também de direção e sentido.

2. Módulos. **a)** $|S| = 1$; **b)** $\sqrt{13}$; **c)** $\sqrt{10}$; **d)** $\sqrt{5}$; **e)** $\sqrt{2}$; **f)** $\sqrt{10}$; **g)** $\sqrt{5}$; **h)** 5; **i)** 3; **j)** $\sqrt{13}$; **k)** $\sqrt{8}$; **l)** $\sqrt{10}$; **m)** $\sqrt{26}$; **n)** $\sqrt{10}$; **o)** $\sqrt{2}$; **p)** $\sqrt{5}$; **q)** 5.

3. Componentes. **a)** $a_x = +5\sqrt{3} \simeq +8,66$ e $a_y = +5$; **b)** $b_x = -3$ e $b_y = +3\sqrt{3} \simeq +5,20$; **c)** $c_x \simeq -8$ e $c_y \simeq -6$; **d)** $d_x = +6$ e $d_y = -6$.

4. $\vec{a} = 5\sqrt{3}\hat{i} + 5\hat{j}$; $\vec{b} = -3\hat{i} + 3\sqrt{3}\hat{j}$; $\vec{c} \simeq -8\hat{i} - 6\hat{j}$; $\vec{d} = 6\hat{i} - 6\hat{j}$.

5. Vetores dados. $\vec{a} = 2\hat{i}$; $\vec{b} = -1\hat{i}$; $\vec{c} = 3\hat{j}$; $\vec{d} = 1\hat{i} + 3\hat{j}$; $\vec{e} = 1\hat{i} + 1\hat{j}$; $\vec{f} = -2\hat{i} + 3\hat{j}$.

Resultados. **a)** $\vec{S} = 1\hat{i}$; **b)** $2\hat{i} + 3\hat{j}$; **c)** $2\hat{i} + 6\hat{j}$; **d)** $1\hat{i} + 10\hat{j}$; **e)** $3\hat{i}$; **f)** $2\hat{i}$; **g)** $-1\hat{i} - 10\hat{j}$.

Bibliografia

- BOLDRINI, José Luiz; COSTA, Sueli I. R.; FIGUEIREDO, Vera Lúcia; WETZLER, Henry G. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.
- BONJORNO, José Roberto *et al.* **Física 1: mecânica**. 3. ed. São Paulo: FTD, 2016.
- BONJORNO, José Roberto *et al.* **Física 2: termologia, óptica, ondulatória**. 3. ed. São Paulo: FTD, 2016.
- BONJORNO, José Roberto *et al.* **Física 3: eletromagnetismo, física moderna**. 3. ed. São Paulo: FTD, 2016.
- BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. **Geometria analítica: um tratamento vetorial**. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
- BUTKOV, Eugene. **Física matemática**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1988.
- CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, Hygino H.; COSTA, Roberto C. F. **Álgebra linear e aplicações**. 6. ed. São Paulo: Atual, 1990.
- CARRON, Wilson; GUIMARÃES, Osvaldo. **As faces da física: volume único**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2002.
- EISBERG, Robert; RESNICK, Robert. **Física quântica: átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas**. Rio de Janeiro: Campus, 1979.
- FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A: funções, limite, derivação e integração**. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- GOLDSTEIN, Herbert; POOLE, Charles; SAFKO, John. **Classical mechanics**. 3rd ed. San Francisco: Addison Wesley, 2002.
- GRIFFITHS, David J. **Introduction to electrodynamics**. 4th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física**, volume 1: mecânica. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física**, volume 2: gravitação, ondas e termodinâmica. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física**, volume 3: eletromagnetismo. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física**, volume 4: óptica e física moderna. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. 2 v.

MACHADO, Kleber Daum. **Teoria do eletromagnetismo**, volume 1. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2000.

MACHADO, Kleber Daum. **Teoria do eletromagnetismo**, volume 2. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2002.

MACHADO, Kleber Daum. **Teoria do eletromagnetismo**, volume 3. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006.

MÁXIMO, Antônio; ALVARENGA, Beatriz. **Física**: volume único. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2007.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de física básica**, 1: mecânica. 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1981.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de física básica**, 2: fluidos, oscilações e ondas, calor. 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1983.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de física básica**, 3: eletromagnetismo. 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1997.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de física básica**, 4: ótica, relatividade, física quântica. 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1998.

OLIVEIRA, Mário José de. **Termodinâmica**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

REIF, Frederick. **Fundamentals of statistical and thermal physics**. New York: McGraw-Hill, 1965.

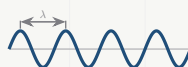
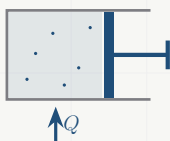
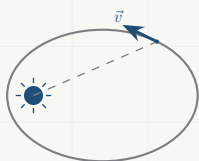
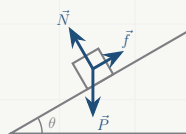
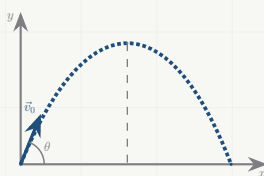
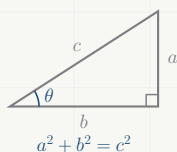
SAKURAI, J. J. **Modern quantum mechanics**. Rev. ed. Reading: Addison-Wesley, 1994.

SALINAS, Silvio R. A. **Introdução à física estatística**. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2005.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra linear**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1987.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1987.

THORNTON, Stephen T.; MARION, Jerry B. **Classical dynamics of particles and systems**. 5th ed. Belmont: Brooks/Cole, 2004.



“A filosofia está escrita neste grande livro, o universo, que permanece continuamente aberto diante de nossos olhos. Mas ele não pode ser compreendido sem que primeiro se aprenda sua linguagem: a linguagem da matemática.”

— Galileu Galilei, adaptação de *O Ensaíador* (1623)

