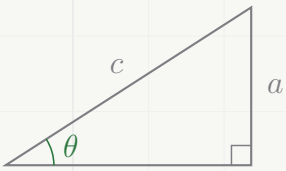
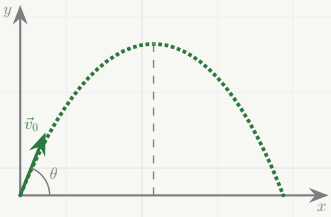
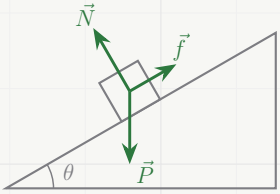
O Básico da Física Básica

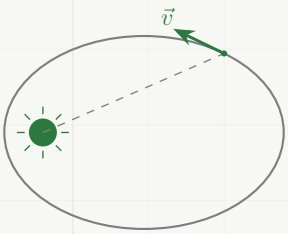
Cinemática

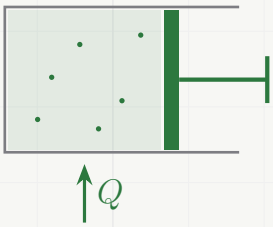


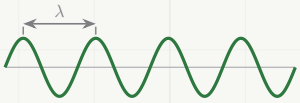
$$a^2 + b^2 = c^2$$

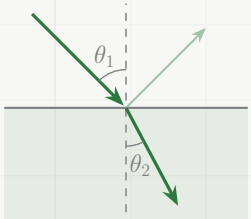


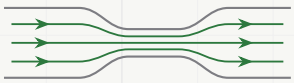


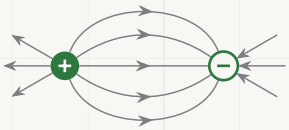


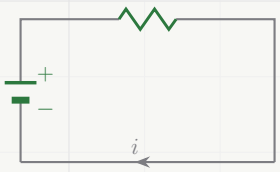


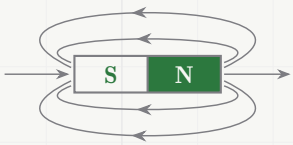


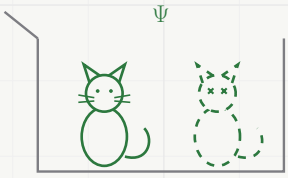












Michel Silva dos Santos

VOLUME 2

Prof. Dr. Michel Silva dos Santos

O Básico da Física Básica

Volume 2

Cinemática

1ª edição

São Borja, RS

2026

ISBN 978-65-02-42505-3

© 2026 Michel Silva dos Santos

O Básico da Física Básica, Volume 2: Cinemática.

1ª edição. São Borja, RS: Editora do Autor, 2026.

A edição digital desta obra é distribuída gratuitamente pelo autor em www.profmichel.com.br. É permitida a sua reprodução, total ou parcial, e a sua distribuição por qualquer meio, para fins educacionais e sem fins lucrativos, desde que citada a fonte e preservada a integridade do conteúdo reproduzido. Os direitos de edição comercial, impressa ou digital, e de alteração da obra permanecem reservados ao autor.

Na produção desta coleção foram utilizadas ferramentas de inteligência artificial como apoio à organização dos materiais do autor, à escrita do código LaTeX das figuras, à revisão ortográfica e gramatical e ao trabalho de edição. A concepção, o conteúdo e a responsabilidade pela obra são do autor. A nota completa sobre o processo de produção está em www.profmichel.com.br.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Santos, Michel Silva dos
O básico da física básica [livro eletrônico] : cinemática / Michel Silva dos Santos. -- São Borja, RS : Ed. do Autor, 2026. -- (O básico da física básica ; v. 2)
PDF

Bibliografia.
ISBN 978-65-02-42505-3

1. Cinemática 2. Física - Estudo e ensino 3. Mecânica do movimento I. Título. II. Série.

26-403663.1 CDD-531.11207

Índices para catálogo sistemático:

1. Física : Cinemática : Estudo e ensino 531.11207

Aline Graziele Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129

Apresentação

Antes de mais nada, é importante dizer o que é este material e por que ele foi escrito da forma como está. Esta é uma coleção de física básica, pensada para o ensino médio, e este texto de apresentação se repete no início de todos os volumes, pois trata da obra como um todo, e não de um assunto específico. A ideia central, aquela que guiou cada escolha daqui para frente, é fugir um pouco dos livros didáticos tradicionais. Não por acaso, o próprio nome da coleção já diz a que veio: reunir o básico da física básica, de maneira enxuta, direta e prática, respeitando a carga horária reduzida com que a física costuma ser estudada nessa etapa.

Um ponto que preciso explicitar logo de início diz respeito à parte visual. Na minha percepção, os livros didáticos atuais sofrem de uma certa poluição de imagens: são tantas figuras, cores, boxes e chamadas que, muitas vezes, o aluno acaba se perdendo e o foco no texto fica em segundo plano. Por isso optei por um material mais sóbrio, majoritariamente em preto e branco, com as figuras reduzidas ao que é realmente necessário para o entendimento. A intenção é que o foco esteja no transcorrer do texto, na leitura e no raciocínio que ela vai construindo. É preciso reconhecer que, para um aluno acostumado ao excesso de imagens, começar por um material assim pode parecer estranho, e até difícil no início. Mas, dada uma chance ao método, tenho convicção de que este formato será muito útil para muitos estudantes.

Outra escolha que merece ser destacada é o uso intenso de exemplos resolvidos. Ao longo de todo o material, sempre que apresento um conteúdo, procuro logo em seguida situá-lo na parte prática, que é justamente onde mora a maior dificuldade dos estudantes. É uma coisa entender a explicação e outra, bem diferente, conseguir aplicar aquilo num exercício. Por isso os exemplos aparecem com tanta frequência, resolvidos passo a passo. Na mesma linha, as listas de exercícios foram pensadas para serem sucintas e com nível de dificuldade progressivo. Os primeiros exercícios de cada lista são, propositalmente, muito próximos dos exemplos resolvidos, e os maiores desafios ficam reservados para o final. A ideia aqui é psicológica: quando o aluno começa a lista conseguindo resolver, ele ganha confiança, e vai pensando "já que cheguei até aqui, vou concluir". Já quando o aluno começa uma lista sem conseguir fazer nem o primeiro item, acontece o contrário, ele perde a vontade de encarar o desafio. Note que essa diferença, que parece pequena, muda completamente a disposição de quem estuda.

Vale ainda um registro sobre a origem deste material, pois ele ajuda a entender algumas escolhas. Este trabalho começou a ser escrito no período da pandemia. Naquele tempo, o uso de inteligências artificiais ainda não era generalizado como é hoje, e o aluno estudava basicamente por três caminhos: os livros, as videoaulas

e a exposição do professor. Eu costumo dizer que essas três coisas, um livro, uma videoaula e um professor, são ferramentas para o desenvolvimento do conhecimento, cada uma com sua vantagem e sua limitação. Um livro está revisado, tem sua estrutura pensada com calma e traz o conhecimento necessário ali descrito; mas o livro não se adapta ao aluno, e se o estudante não entender um parágrafo, por mais que releia, o livro vai responder sempre da mesma forma. Uma videoaula foi editada, e nela o apresentador pode até fazer surgir um balãozinho mostrando dois carros colidindo, com recursos visuais que ajudam; mas, assim como o livro, se o aluno voltar o vídeo, ele responderá igual, e é o aluno quem precisa se adaptar. Já o professor talvez não tenha a mesma organização e a mesma escrita revisada de um livro, e quando fala de dois carros colidindo precisa acreditar que os alunos estão imaginando a cena correta; mas o professor tem um trunfo que os outros não têm, que é justamente se adaptar ao aluno. Muitas vezes o estudante nem percebeu que não entendeu algo, e o professor, observando, consegue focar exatamente naquele ponto. São, portanto, ferramentas distintas, cada qual com suas qualidades e suas dificuldades.

Acontece que, hoje, com a inteligência artificial, essa história mudou. A IA pode reunir o melhor de todas essas ferramentas ao mesmo tempo. O problema é que ela é tão boa que a facilidade que gera pode se transformar numa grande dificuldade. Quando a IA passa a resolver tudo, e o aluno não tem mais paciência para pensar, o aluno simplesmente deixa de aprender. Ele não constrói o próprio conhecimento, porque a resposta vem fácil demais, o entendimento vem fácil demais, e aquilo não fixa nem gera um conhecimento seu, com o seu formato. E é esse formato pessoal que faz a ciência evoluir, pois são as diferentes maneiras que cada um tem de aprender que levam as pessoas a pensarem diferente sobre as mesmas coisas e, com isso, a avançarem sobre um assunto. Hoje o aluno consegue a lista inteira resolvida em segundos, sem pensar. Mas é preciso ter claro que isso é enganar a si mesmo, porque ter a lista completa nunca foi o importante. Certamente aprendeu mais o aluno que fez trinta por cento da lista pensando por conta própria, sem recorrer à IA, do que aquele que entregou cem por cento sem dedicar tempo nem raciocínio.

Isso não quer dizer que a inteligência artificial deva ser evitada, muito pelo contrário. Existe, sim, uma maneira certa de trabalhar com ela e, aí sim, construir conhecimento próprio: usá-la como suporte, e não como atalho. Em vez de pedir a resposta, pergunte a ela o que você poderia estudar para conseguir resolver aquilo. Diga algo como “aja como um professor e me explique o conteúdo necessário para eu desenvolver as habilidades de resolver este problema”. Ou seja, peça ajuda sem pedir a resposta pronta. Dê a si mesmo a chance de resolver sozinho, deixando a IA auxiliar sem pensar no seu lugar. É uma diferença sutil, mas é ela que separa quem usa a ferramenta a favor do aprendizado de quem a usa contra o próprio aprendizado.

Preciso também salientar que tenho consciência de que nem todos os conteúdos aqui reunidos serão trabalhados ao longo do ensino médio. As escolas têm estruturas e matrizes curriculares diferentes, e por isso dedicam tempos distintos a uma mesma disciplina. Num mundo ideal, o aluno estudaria toda esta física básica; na prática, cada realidade vai aproveitar o que for possível. Além disso, este material não foi pensado apenas para o estudante. Ele tem também o intuito de auxiliar o professor de física, oferecendo exemplos resolvidos, sequências didáticas e listas de exercícios de boa acessibilidade, de modo que colegas com diferentes experiências e diferentes níveis de formação possam fazer uso dele em suas aulas.

E aqui chego ao ponto em que mais acredito, e que resume o espírito de tudo o que foi dito até agora. Eu não acredito na ideia de que o conhecimento seja transposto pronto de uma pessoa para outra, como quem entrega um objeto de mão em mão. Para mim, o conhecimento é sempre construído por dentro, individualmente, por cada um que estuda; o livro, a videoaula, o professor e até a inteligência artificial são apenas ferramentas nessa construção, e nenhum deles aprende no lugar do aluno. E, longe de ser um problema, isso é a parte mais bonita da coisa. É justamente porque cada um constrói o conhecimento à sua maneira que ele se fixa, se torna seu de verdade e permanece. Mais do que isso: são essas formas pessoais e diferentes de entender um mesmo assunto que fazem uma pessoa pensar o que outra não pensou, e é daí, dessa diversidade de olhares, que a ciência avança. Por isso, o esforço de construir o próprio conhecimento não é um obstáculo a ser evitado; é exatamente ali que o aprendizado de verdade acontece.

O que fica, no fim das contas, é o básico da física básica que todo aluno deveria conhecer ao concluir o ensino médio: um pilar para quem seguirá na área de exatas e uma base de cultura científica para os demais. Dada uma chance ao método, com calma e dedicação, tenho certeza de que este caminho valerá a pena.

Sumário

Apresentação **i**

Por que estudar física? **vii**

1 Conceitos Iniciais **1**
1.1 Introdução à cinemática . . . 2
1.2 Grandezas físicas e unidades . . . 3
1.2.1 Grandezas físicas . . . 3
1.2.2 Unidades . . . 4
1.2.3 Unidades derivadas . . . 6
1.2.4 Prefixos . . . 7
1.3 Referencial e movimento . . . 9
1.3.1 Comprimento . . . 9
1.3.2 Posição . . . 10
1.3.3 Corpo pontual e corpo extenso . . . 13
1.4 Trajetória, deslocamento e distância . . . 14
1.4.1 Trajetória . . . 14
1.4.2 Deslocamento e distância percorrida . . . 15
1.5 Tempo . . . 18
1.6 Velocidade . . . 20
1.6.1 Velocidade escalar média . . . 20
1.6.2 Velocidade instantânea . . . 22
1.7 Aceleração . . . 23
1.7.1 Aceleração escalar média . . . 23
1.7.2 Aceleração instantânea . . . 26
Lista de exercícios 1 . . . 27

2 Movimento Uniforme **29**
2.1 O que é o movimento uniforme . . . 30
2.2 Equação horária da posição . . . 30
2.3 Gráficos no movimento uniforme . . . 34
2.4 Movimento com vários corpos e corpo extenso . . . 38
2.5 Velocidade relativa . . . 40
Lista de exercícios 2 . . . 43

3 Movimento Uniformemente Variado **45**
3.1 Equações horárias do movimento uniformemente variado . . . 47
3.2 Gráficos no movimento uniformemente variado . . . 58

3.3 Equação de Torricelli 70
Lista de exercícios 3 75

4 Queda Livre e Lançamento Vertical 77
4.1 Queda livre 78
4.1.1 Caso 1 - referencial para cima 79
4.1.2 Caso 2 - referencial para baixo 81
4.1.3 Deslocamento a cada segundo 82
4.2 Lançamento vertical 93
4.2.1 Equações do lançamento vertical 95
Lista de exercícios 4 105

5 Lançamentos em Duas Dimensões 107
5.1 Composição vetorial de movimentos 108
5.2 Velocidade relativa em duas dimensões 110
5.3 Lançamento horizontal 113
5.4 Lançamento oblíquo 122
Lista de exercícios 5 139

6 Movimento Circular Uniforme 141
6.1 Aceleração em trajetórias curvas 142
6.2 Grandezas angulares: arco, ângulo e radiano 143
6.3 Velocidade angular média e velocidade escalar média 148
6.4 Frequência e período 155
6.5 Movimento circular uniforme 163
6.6 Acoplamento e transmissão (polias e engrenagens) 166
6.6.1 Acoplamento por correia ou por contato 166
6.6.2 Acoplamento no mesmo eixo 167
Lista de exercícios 6 170

7 Movimento Circular Uniformemente Variado 171
7.1 Aceleração angular 172
7.2 Equações horárias angulares 173
7.3 Aceleração tangencial e aceleração total 177
Lista de exercícios 7 180

A Gabarito 181

Bibliografia 185

Por que estudar física?

A maior pergunta que toda a humanidade, que tem entre 12 e 18 anos, se faz hoje em dia é:

— Por que eu preciso estudar isso?

A resposta é simples. PORQUE TEM QUE ESTUDAR.

Agora tentarei explicar os motivos do PORQUE TEM QUE ESTUDAR.

A "busca" da sociedade em ter plenitude de felicidade, condições de convivência entre si prósperas e a curiosidade levaram ao desenvolvimento tecnológico e à "evolução" social, que cada vez demanda uma maior "evolução". Ou seja, há um ciclo constante de busca de aprimoramento que sempre gera novas demandas. Note que existe uma série de aspas pois aqui estamos mais no campo da percepção pessoal do mundo do que no científico. Mas entendendo que a necessidade humana induz a uma rotina de mudanças, podemos perceber que a evolução tecnológica está diretamente ligada ao bem-estar social.

Como hoje em dia o bem mais precioso é o conhecimento, a economia que o detém controla as "necessidades" de novas demandas, o que está diretamente relacionado ao bem-estar social. Desta forma, qualquer nação precisa ter evolução tecnológica se quiser se integrar ao mundo como ele hoje é entendido. Dito isso, podemos finalmente falar em física. A física é a ciência mãe quando falamos de tecnologia. É dela que todas as outras ciências surgem. Ao menos do ponto de vista histórico. Ciências como a química, a biologia, a meteorologia, a geologia e várias outras, se atrelam à física do ponto de vista da própria definição da física, mas ganham vida particular devido às suas características próprias e alto grau de dificuldade em seu entendimento. Porém se pensarmos na definição da física:

> Física, do grego *physis* (NATUREZA), é a ciência que busca entender e descrever a natureza.

todas as demais ciências são produtos da natureza e portanto fazem parte da física. Obviamente que isso não diminui a complexidade nem altera a essência de nenhuma outra ciência, que por muitas vezes são até mais complexas em entendimento e geram mais benefícios para a sociedade do que a própria física como hoje a estudamos.

Agora tentarei associar a física com a evolução tecnológica do ponto de vista histórico. Note que desde o início da sociedade o aprimoramento da tecnologia propiciou maiores liberdades à raça humana. Desde o domínio do fogo ao uso de ferramentas agrícolas e de caça. Sabemos que na antiguidade, e ainda hoje em

algumas formas de sociedade, havia os chamados sábios. Estes detinham certo conhecimento e isso lhes trazia *status* diferenciado na sociedade.

A física se origina da filosofia, mais especificamente da *Philosophiae Naturalis*. Antigamente os filósofos eram também os que exerciam a ciência. Porém não como a conhecemos hoje. Aqueles que detinham, perante a sociedade, o prestígio de sábios, eram quem ditavam a forma correta de entendimento do mundo. Embora a forma como fazemos ciência hoje abomine esta ideia, essa forma foi suficiente para gerar evolução tecnológica e de conhecimento na antiguidade. Podemos citar o exemplo dos conhecimentos disseminados na Grécia Antiga por Pitágoras de Samos (570 a.C.-495 a.C.) e Arquimedes de Siracusa (287 a.C.-212 a.C.). Ainda hoje usamos estes conhecimentos, mas com aprofundamentos matemáticos desenvolvidos posteriormente. Porém, podemos notar que a evolução não foi muito grande. Há sim grandes construções e alguns sofisticados mecanismos de engenharia que ainda hoje vemos, oriundos da antiguidade, mas nada que fosse completamente acessível a todos.

Podemos ver que até meados do século XV a evolução tecnológica caminhou a passos curtos. Mas há evidente modificação nessa lógica quando olhamos para o espaço de tempo entre os séculos XV e XIX. Iniciamos neste período como seres de uma sociedade onde simplesmente nascíamos, nos reproduzíamos, guerreávamos com espadas e morríamos. Como já era desde a época do nascimento de Cristo e até mesmo antes disso. Temos então que em ao menos 1500 anos a sociedade em praticamente nada evoluiu tecnologicamente, o que coincide com o período em que difundir e revelar conhecimento era algo até mesmo fora da lei e digno de pena de morte.

A repressão ao conhecimento foi responsável por uma estagnação imensa na evolução tecnológica. Ao fim deste período, ao chegar no século XIX, temos já grandes mudanças na maneira como a sociedade se organizava e na tecnologia. Já havia navios, carros, comunicação entre continentes, rádio, óculos, mecanismos de observação espacial, possibilidade de produção de alimentos e ferramentas em massa e tantos outros avanços tecnológicos que ocorreram nesse período. Não por acaso essa evolução coincide com o desenvolvimento da **física clássica**. Isso só foi possível graças a um "afrouxamento" do controle do conhecimento pela religião e a possibilidade de difusão do mesmo.

A partir do século XV era mais "suave" a perseguição ao conhecimento que não fosse o exposto pelos conceitos religiosos. Nesse período tivemos também o casamento do saber com a principal ferramenta da ciência, a MATEMÁTICA. A partir do século XV temos então o surgimento da física, oriunda da filosofia, com seu uso sendo estreitamente ligado à matemática como prova teórica e à experimentação como prova explícita. Desde então a forma correta de entender e explicar a natureza não está nas simples palavras dos sábios, mas sim na prova inconteste da

matemática e na repetição experimental. Assim, todos puderam se tornar sábios e não somente aqueles que já detinham esse *status* na sociedade.

Fica evidente que a física tem ligação estreita e direta com a evolução tecnológica ocorrida entre os séculos XV e XIX. Iniciamos o século XV simplesmente nascendo, nos reproduzindo, guerreando com espadas e morrendo. Ao passo que terminamos o século XIX com navios a vapor, carros, indústrias com produção em massa, equipamentos para observações astronômicas e comunicação entre continentes. Se observarmos o surgimento da **física moderna** no início do século XX e notarmos a evolução tecnológica que ocorreu nestes últimos 100 anos e que ocorre diariamente, veremos então que o aprimoramento da física nos leva a uma evolução exponencial da tecnologia.

Dito isto, podemos então separar temporalmente a física em duas classes:

Física Clássica (séculos XV a XIX)

Física Moderna (século XX em diante)

Na física clássica temos os assuntos estudados com maior amplitude no ensino médio, que geralmente se divide da seguinte forma:

1º ANO

Mecânica Clássica

2º ANO

Termodinâmica | Óptica | Ondulatória

3º ANO

Eletromagnetismo

Pode-se salientar que a ondulatória é uma parte intrínseca da mecânica clássica, mas que acaba sendo estudada separadamente por suas características específicas. Hoje sabemos que a óptica é um ramo ligado ao eletromagnetismo, mas como seu estudo no ensino médio é mais ligado aos seus efeitos geométricos, ainda hoje estudamos separadamente este assunto. Temos então que a mecânica clássica está ligada ao movimento e energia, a termodinâmica aos efeitos do calor e da temperatura e o eletromagnetismo à interação de efeitos elétricos e magnéticos na natureza.

De maneira superficial, devido a sua complexidade, podemos ao fim do ensino

médio ainda estudar tópicos de física moderna. Costumamos dividir esta área da física em duas partes

Teoria da Relatividade

Mecânica Quântica

Na teoria da relatividade estudamos a mecânica para altas velocidades, próximas à da luz, onde a mecânica clássica (Newtoniana) não descreve corretamente uma série de fenômenos. Já na mecânica quântica estudamos a matéria e energia para pequenas dimensões, próximas das dimensões atômicas. Estas teorias desenvolvidas em grande parte a partir do início do século XX são as grandes responsáveis pelo grande desenvolvimento tecnológico dos últimos 100 anos. Quer sejam os bons desenvolvimentos, como a possibilidade de carregar um pequeno computador na forma de um celular no bolso, quer sejam os desenvolvimentos tecnológicos responsáveis, por exemplo, pela possibilidade de produção de uma bomba atômica. Na física moderna poderíamos também inserir a cosmologia, astrofísica, física da matéria condensada, física de partículas, física dos plasmas, física médica e diversos outros ramos modernos de estudos físicos. Porém por a maioria destes ramos terem seus desenvolvimentos ligados à relatividade e à quântica, costuma-se resumir física moderna nestes dois ramos.

Podemos agora iniciar o assunto deste volume. Vamos estudar a **cinemática**, que descreve o movimento por meio da posição, do deslocamento, da velocidade e da aceleração. Primeiramente, aprenderemos a indicar onde um corpo está e como sua posição muda no tempo. Depois veremos movimentos em linha reta, lançamentos em duas dimensões e movimentos circulares. Os recursos matemáticos apresentados no Volume 1 serão usados ao longo desse caminho. Com essa descrição em mãos, teremos a base para estudar, no Volume 3, as interações que modificam o movimento.

1

Conceitos Iniciais

O que você vai aprender

- Identificar grandezas escalares e vetoriais e usar suas unidades no S.I.
- Descrever um movimento a partir do referencial, da posição e da trajetória.
- Decidir quando as dimensões de um corpo precisam ser consideradas.
- Distinguir deslocamento de distância percorrida e valores médios de instantâneos para velocidade e aceleração.

Por que estudamos isto? Ao observar um carro na estrada, podemos perguntar onde ele está, para que lado segue e como sua velocidade muda. Neste capítulo vamos dar um significado preciso a essas perguntas. Com isso, teremos os conceitos necessários para descrever os movimentos que estudaremos neste volume.

1.1 Introdução à cinemática

A primeira parte da mecânica clássica que iremos tratar será a cinemática. Isso ocorre devido à sua maior facilidade de entendimento (por a mesma ser relacionada ao cotidiano e de fácil observação) e também por sua descrição matemática ser simples. A cinemática foi também do ponto de vista histórico uma das primeiras áreas desenvolvidas. **Aristóteles** (384 a.C.-322 a.C.) e **Arquimedes de Siracusa** (287 a.C.-212 a.C.) desenvolviam estudos neste ramo da ciência. No século II, **Cláudio Ptolemeu** (90-168) realizou alguns trabalhos relacionados a essa área da mecânica. Nomes como **Nicolau Copérnico** (1473-1543), **Johannes Kepler** (1571-1630), **Galileu Galilei** (1564-1642), dentre outros, foram fundamentais para o desenvolvimento da cinemática como hoje a conhecemos. Porém, quem melhor compilou o conhecimento até então desenvolvido, preencheu várias lacunas deste conhecimento e criou a maior parte da matemática (cálculo diferencial e integral) que usamos hoje na descrição dos movimentos foi **Isaac Newton** (1643-1727). Em sua obra intitulada *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* ele revolucionou o conhecimento da mecânica (não somente da cinemática) e explicou vários fenômenos até então sem descrições científicas corretas. Essa é talvez a maior obra da vida de Newton e da história das ciências naturais.

A palavra cinemática se origina do grego **kinema**, que significa **movimento**. Logo, estudaremos agora o ramo da mecânica que se preocupa com o movimento, sem levar em conta suas causas. Em um primeiro momento conheceremos movimentos unidimensionais e, em seguida, trabalharemos com movimentos bidimensionais. Fenômenos relacionados à causa do movimento serão posteriormente estudados no ramo da mecânica que conhecemos como **DINÂMICA**.

1.2 Grandezas físicas e unidades

Sendo a Física a ciência que busca entender e descrever a natureza, precisamos de um meio de codificar a natureza matematicamente. Lembre que usamos a experimentação e a matemática como linguagem de comunicação na designação de ciência moderna.

Assim como é necessário entender uma língua (português, inglês, francês,...) para nos comunicarmos falando, o entendimento da matemática se faz necessário para a compreensão da física. Sendo assim, a matemática é uma aliada na descrição da natureza e seu conhecimento é tão imprescindível quanto o conhecimento de qualquer linguagem em uma conversa entre pessoas.

1.2.1 Grandezas físicas

Quando buscamos caracterizar uma propriedade da natureza usamos uma palavra atribuída a essa propriedade e podemos associar uma letra para caracterizar a mesma. Por exemplo, entre você e este livro existe uma característica da natureza que chamamos de comprimento. Usamos então a palavra **comprimento** para caracterizar essa propriedade da natureza e poderíamos, por exemplo, usar a letra **d** associada a essa mesma propriedade. Sabemos que se você arremessar esse mesmo livro em alguma direção, ele assumirá uma propriedade que chamamos de **velocidade** (**v**). Esse mesmo livro possui uma propriedade física chamada **massa** (**m**). Ou seja, existem vários comportamentos padrões da natureza e a esses comportamentos sempre atribuímos uma palavra (**comprimento, velocidade, massa, força, tempo, intensidade luminosa, temperatura, aceleração, carga elétrica, energia,...**) e a essas palavras podemos atribuir uma letra que a represente (**d, v, m, F, t, L,** θ**, a, q, E**). Sabendo que as diferentes grandezas físicas extrapolam o número de letras do alfabeto latino (a, b, c, d, ..., z), por vezes, será necessário o uso de letras atribuídas a algumas grandezas físicas de outros alfabetos, como o grego (α, β, γ, ...).

> Todos os diferentes comportamentos da natureza que podemos medir chamamos de **GRANDEZA FÍSICA**.

Perceba que nem todo comportamento que vemos na natureza podemos mensurar. Por exemplo, sentimentos são comportamentos que vemos por padrão na natureza mas não podemos medir. Logo, são exemplos para o que não é uma grandeza física. Não basta ser uma característica da natureza. É necessário que possamos medir e atribuir valor a essa característica.

Estudaremos dois tipos de grandezas físicas

Grandeza Escalar **Grandeza Vetorial**

Uma grandeza escalar é toda grandeza física que somente a informação de seu valor numérico (**módulo**) é o suficiente para dar todo conhecimento a respeito desta. Por exemplo, ao perguntarmos a idade de alguém, se esta pessoa falar um valor numérico (15 anos) teremos toda informação necessária sobre a grandeza física tempo. Ou se perguntarmos a temperatura de um ambiente e alguém responder um valor numérico (30 ºC), a grandeza física está com as informações necessárias definidas. Não temos direção e sentido associados a essas grandezas físicas.

Diferentemente, uma grandeza do tipo vetorial (ver o Volume 1), necessita além da informação de **módulo**, também informações sobre **direção** e **sentido**. Por exemplo, se for dito que algo será arremessado com velocidade de $20\,\mathrm{m/s}$ não saberemos todo efeito deste arremesso. Saberemos sim a intensidade da velocidade mas não a direção e sentido que o objeto se movimentará. Isso significa que a grandeza física velocidade é do tipo vetorial. Outros exemplos de grandezas que necessitam de **módulo**, **direção** e **sentido**, ou seja, são grandezas físicas vetoriais, são deslocamento, força, aceleração, dentre outras.

Existe ainda outro tipo de grandeza física, chamada grandeza tensorial. Mas essas não serão alvo de nossos estudos. É importante saber que uma grandeza vetorial, quando analisada em um sistema de coordenadas unidimensional, pode ser caracterizada como sendo escalar. Podemos então analisar grandezas vetoriais levando em conta somente sua característica escalar, mas ainda assim estas grandezas continuam sendo do tipo vetorial. Por exemplo, um de nossos primeiros alvos de estudo será a velocidade escalar média. Somente levaremos em conta a característica escalar da velocidade, porém isso não faz com que a velocidade deixe de ser uma grandeza física vetorial. Estaremos usando uma espécie de atalho para o entendimento de um certo movimento, tendo em vista que a matemática associada aos vetores tem uma maior complexidade, como vimos no Volume 1.

1.2.2 Unidades

Agora que definimos que grandeza física é uma característica da natureza que podemos mensurar, devemos perceber que a forma que medimos algo pode variar. Por exemplo, podemos medir a grandeza física comprimento em metros, polegadas, jardas, milhas, pés e de várias outras maneiras. A essas diferentes formas de medir damos o nome de **UNIDADES**. Ou seja

> Uma grandeza física pode ter várias **UNIDADES** diferentes. Mas uma **UNIDADE** somente pode ser atribuída a uma mesma grandeza física.

Resumindo o que foi dito até aqui. Uma característica da natureza que pode ser medida é chamada de **GRANDEZA FÍSICA**. Essa mesma característica só pode

ser atribuída a uma única GRANDEZA FÍSICA. Ou seja, não podemos chamar a característica da natureza que existe entre você e o livro de comprimento e também a característica relacionada ao movimento do livro, quando este é arremessado, de comprimento. Por serem características diferentes usamos palavras diferentes. No caso, comprimento e velocidade.

Uma GRANDEZA FÍSICA pode ser medida de várias formas (**UNIDADES**) diferentes. Mas uma UNIDADE somente pode ser atribuída a uma determinada grandeza física. Ou seja, não podemos dizer que um comprimento é $50\,\mathrm{kg}$ (quilograma), pois a unidade kg está relacionada com a massa de um objeto e não ao comprimento. Assim como também não podemos dizer que a massa de um objeto é $5\,\mathrm{m}$, pois metros é unidade de comprimento. Mas podemos dizer que um comprimento é $1000\,\mathrm{m}$ (metro), $0{,}621371\,\mathrm{mi}$ (milha), $39.370{,}08\,\mathrm{pol}$ (polegadas), pois todas estas diferentes formas de medir são UNIDADES da GRANDEZA FÍSICA comprimento.

O vasto número de unidades para uma mesma grandeza física advém de vários fatores. O principal é a localização geográfica de onde está sendo feita a medida. Antigamente a comunicação entre locais distantes não era como hoje em dia. Por isso havia várias formas diferentes de realizar medidas. Em alguns locais se media comprimento usando os pés, em outro local se usava o polegar, em outro se usava um outro parâmetro de comparação. Por esse motivo distintas unidades surgiram para uma mesma grandeza física. Quando os meios de transporte e comunicação evoluíram, alguns problemas surgiram. Por exemplo, uma pessoa que costumava medir distância em polegadas e outra em metros, se não houvesse conhecimento sobre a relação entre estas duas unidades, em uma conversa, essas pessoas não se entenderiam sobre qualquer medida para comprimento. Por isso saber a relação entre diferentes unidades de uma mesma grandeza física é importante.

Para respeitar as diferentes culturas, mantendo a possibilidade de cada local usar suas unidades preferidas, mas a fim de criar um padrão mundial, foram designadas as unidades básicas a que todas as demais unidades devem se relacionar. Este padrão foi chamado de

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES - S.I.

Este padrão foi criado devido às comuns dificuldades em intercâmbios de trabalhos científicos de distintos países e em relação a produtos comercializados entre nações onde as especificações eram dadas usando as unidades dos locais de origem. A organização de tantas grandezas físicas era tema de estudo já há muito tempo. Na 14ª Conferência Geral de Pesos e Medidas, que ocorreu em 1971, foram então definidas 7 grandezas físicas básicas às quais seriam atribuídas unidades padrões com que as demais deviam se relacionar.

GRANDEZA FÍSICA	NOME DA UNIDADE	SÍMBOLO DA UNIDADE
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s
Corrente elétrica	ampère	A
Temperatura	kelvin	K
Quantidade de substância	mol	mol
Intensidade luminosa	candela	cd

Tabela 1.1: Grandezas e Unidades Básicas do S.I.

Outros sistemas de unidades são ainda hoje em dia usados. Temos por exemplo o precursor do S.I. conhecido como sistema MKS (metro-quilograma-segundo), o sistema CGS (centímetro-grama-segundo), sistema imperial de unidades (origem inglesa). Neste livro faremos uso do sistema internacional S.I.

1.2.3 Unidades derivadas

Obviamente não temos somente sete grandezas físicas, com isso, não temos como usar somente sete unidades. Porém, por muitas grandezas físicas terem relação direta com as grandezas físicas que possuem unidades básicas no S.I., dizemos que as unidades destas outras grandezas são **unidades derivadas**. Temos na tabela 1.2 algumas destas grandezas físicas que possuem unidades derivadas. Vemos também na tabela 1.3 que existem grandezas físicas com unidades que possuem nomes próprios específicos, mas que se relacionam com as unidades básicas em suas definições. À medida que tais grandezas forem necessárias em nossos estudos as mesmas serão apresentadas junto com suas respectivas unidades e as relações das mesmas com as unidades básicas.

GRANDEZA FÍSICA	NOME DA UNIDADE DERIVADA	SÍMBOLO DA UNIDADE DERIVADA
Velocidade	metro por segundo	$\mathrm{m/s}$
Aceleração	metro por segundo ao quadrado	$\mathrm{m/s^2}$
Área	metro quadrado	$\mathrm{m^2}$
Volume	metro cúbico	$\mathrm{m^3}$
Densidade de Massa	quilograma por metro cúbico	$\mathrm{kg/m^3}$
Densidade de Corrente	ampère por metro quadrado	$\mathrm{A/m^2}$
Número de Onda	por metro	$\mathrm{1/m}$

Tabela 1.2: Grandezas e Unidades Derivadas do S.I.

GRANDEZA FÍSICA	NOME PRÓPRIO DA UNIDADE	SÍMBOLO PRÓPRIO DA UNIDADE	RELAÇÃO COM UNIDADES BÁSICAS
Força	newton	N	$\mathrm{kg\,m/s^2}$
Carga Elétrica	coulomb	C	$\mathrm{A\,s}$
Energia	joule	J	$\mathrm{kg\,m^2/s^2}$
Frequência	hertz	Hz	$1/\mathrm{s}$
Potência	watt	W	$\mathrm{kg\,m^2/s^3}$
Pressão	pascal	Pa	$\mathrm{kg/(m\,s^2)}$
Potencial Elétrico	volt	V	$\mathrm{kg\,m^2/(s^3\,A)}$

Tabela 1.3: Grandezas e Unidades Derivadas do S.I. com Nomes Próprios.

1.2.4 Prefixos

Vimos então que podemos representar grandezas físicas com letras, unidades com letras e agora veremos que também representamos alguns números com letras. A isso chamamos de **prefixos**. Eis um dos grandes problemas para entendimento da física, uma mesma letra pode ter diferentes significados. Deve-se levar em conta o contexto a que a mesma está relacionada, por exemplo, a letra **m** se estiver representando uma grandeza física significa **massa**. Essa mesma letra **m** se estiver representando uma unidade, significa **metros**. E veremos que a letra **m**, se estiver representando um prefixo é chamada **MILI** e significa 10^{-3}.

Devemos ter claras as diferenças entre grandeza física, unidade e prefixo ao ler qualquer texto ou problema científico. Notemos que uma unidade pode conter intrinsecamente um prefixo acompanhado por uma outra unidade, por exemplo, kg. A letra **k** é um prefixo que significa o valor $10^3 = 1000$ e a letra **g** significa a unidade **gramas**. Com isso já podemos ver a relação que $1\,\mathrm{kg} = 1000\,\mathrm{g}$. Note que a junção de um prefixo (**k**) e uma unidade (**g**) gera uma unidade chamada kg (quilograma). Não à toa, o prefixo **k** é chamado **QUILO**. Veja que isso se repete com outras unidades, por exemplo, a unidade km (quilômetros) é a junção do prefixo quilo e a unidade metro. Novamente temos que $1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m}$.

Abaixo veremos na tabela que cada prefixo tem uma letra que o simboliza e um nome. Poderá ser notado que alguns prefixos já são usados cotidianamente mas serão agora compreendidos como sendo um valor matemático que o mesmo representa.

NOME DO PREFIXO	SÍMBOLO DO PREFIXO	VALOR REPRESENTADO
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
quilo	k	10^{3}
hecto	h	10^{2}
deca	da	10^{1}
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
mili	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}

Tabela 1.4: Prefixos do S.I.

Exemplo 1.1

Ao organizar suas medidas, um estudante registrou $3{,}5\,\mathrm{km}$ para a distância de casa à escola, $2\,\mathrm{mm}$ para a espessura de uma moeda e $40\,\mu\mathrm{s}$ para o tempo de resposta de um circuito. Como podemos escrever os comprimentos em metros e o tempo em segundos?

Dados do problema

$$d_1 = 3{,}5\,\mathrm{km}$$
$$d_2 = 2\,\mathrm{mm}$$
$$t = 40\,\mu\mathrm{s}$$

Basta substituir cada prefixo pelo fator correspondente na tabela 1.4. Para converter quilômetros em metros, usamos o fator 10^3, pois cada quilômetro contém mil metros:

$$d_1 = 3{,}5\,\mathrm{km} = 3{,}5 \cdot 10^3\,\mathrm{m} = 3{,}5 \cdot 1000\,\mathrm{m}$$

$$\boxed{d_1 = 3500\mathrm{m}}$$

No caso do milímetro, cada unidade corresponde a $10^{-3}\,\mathrm{m}$. Temos então

$$d_2 = 2\,\mathrm{mm} = 2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m} = 2 \cdot 0{,}001\,\mathrm{m}$$

$$\boxed{d_2 = 0{,}002\mathrm{m}}$$

Para o tempo, o prefixo micro indica a milionésima parte do segundo:

$$t = 40\,\mu\text{s} = 40 \cdot 10^{-6}\,\text{s}$$

$$\boxed{t = 4 \cdot 10^{-5}\text{s} = 0{,}00004\,\text{s}}$$

Podemos conferir os resultados observando o tamanho das unidades: o valor numérico aumenta ao passar de quilômetros para metros e diminui ao passar de milímetros para metros. Para o tempo muito pequeno, a notação científica (Volume 1) torna a escrita mais simples.

1.3 Referencial e movimento

Iniciaremos agora nossos estudos da mecânica clássica pelos movimentos mais simples e iremos avançando no grau de dificuldade. Neste primeiro momento iremos trabalhar com movimentos de translação, ou seja, movimento ao longo do espaço de um dado corpo sem considerar movimentos do corpo em seu próprio eixo ou outra rotação qualquer. Ainda não faremos qualquer estudo a respeito do que causou o movimento, somente analisaremos as características do mesmo ao longo do tempo. Antes mesmo de analisar os tipos de movimentos em si, será feita uma explanação sobre as grandezas físicas envolvidas neste primeiro momento de estudo. Aqui iniciaremos com a definição de alguns termos técnicos que serão necessários ao longo do avanço de nossos estudos. As quatro principais grandezas físicas envolvidas na cinemática são **COMPRIMENTO**, **TEMPO**, **VELOCIDADE** e **ACELERAÇÃO**. A seguir, estudaremos cada uma dessas grandezas para após estudar os movimentos em questão que envolvem as mesmas.

1.3.1 Comprimento

Nossa primeira grandeza física a ser estudada será então o comprimento. Uma das mais básicas características da natureza, o comprimento está relacionado ao espaço e denota a distância entre dois pontos espaciais distintos. É uma grandeza física do tipo **escalar** e sua unidade no Sistema Internacional é o **metro** [m]. Em um primeiro momento a comunidade científica utilizou um objeto para determinar o real tamanho do que chamamos de metro. Este objeto era uma barra de platina-irídio guardada no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, próximo a Paris. Esta barra era usada como padrão e sempre que se buscava determinar precisão de medida de comprimento se comparava com este objeto. Com o passar do tempo uma forma de aferir maior precisão que não dependesse de um objeto se tornou necessária. Com isso se alterou o padrão, passando a ser

metro é a distância que a luz percorre no vácuo em um intervalo de $\frac{1}{299.792.458}$ segundos.

Decorar esta descrição não se faz necessário. Mas entender que a mesma é um padrão que pode ser usado em qualquer lugar do universo (tendo em vista que a luz tem a mesma velocidade em todos os pontos de vácuo no universo) é importante pois nos mostra que padrões que podem ser gerais são mais úteis do que aqueles que ficam relacionados a objetos e falhas humanas.

Comprimento possui muitas distintas unidades e associação com prefixos em nosso dia a dia. Conhecer a relação de alguns destes é importante:

- $1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m}$ (Quilômetro)
- $1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{cm}$ (Centímetro)
- $1\,\mathrm{m} = 1000\,\mathrm{mm}$ (Milímetro)
- $1\,\mathrm{m} = 1.000.000\,\mu\mathrm{m}$ (Micrômetro)
- $1\,\mathrm{mi} = 1609{,}34\,\mathrm{m}$ (Milha)
- $1\,\mathrm{yd} = 0{,}9144\,\mathrm{m}$ (Jarda)
- $1\,\mathrm{ft} = 0{,}3048\,\mathrm{m}$ (Pé)
- $1\,\mathrm{in} = 2{,}54\,\mathrm{cm}$ (Polegada)

As quatro primeiras derivações de comprimento acima são basicamente prefixos de metros usados corriqueiramente, enquanto que as quatro últimas são amplamente usadas fora do Sistema Internacional e foram aqui citadas para conhecimento de suas existências mas estas não serão alvo de nossos estudos.

1.3.2 Posição

Iremos agora associar o comprimento com características matemáticas para desenvolver nosso conhecimento em física. A **posição** estará sempre relacionada a um sistema de coordenadas que iremos adotar. Logo, um ponto do espaço que iremos descrever com o auxílio deste sistema de coordenadas será a nossa **POSIÇÃO**. Veremos que o que mais nos interessará será a diferença entre posições ou a determinação de posições em instantes de tempo específicos. Mas ter a clareza do que é a posição é essencial para estes entendimentos futuros. A letra que usaremos para descrever a posição será o S maiúsculo.

S = Posição

Logo, precisamos do auxílio de um sistema de coordenadas (ver o Volume 1) para definir posição. Para adotar corretamente um sistema de coordenadas devemos ter em mente um dos conceitos mais importantes da física. O conceito de

Referencial

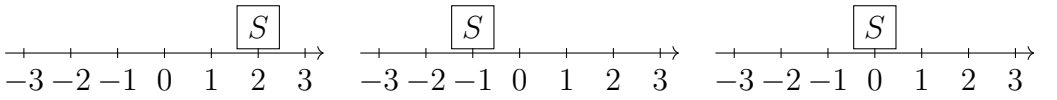
O entendimento do conceito de referencial é essencial para o estudo do movimento. Na verdade, haver ou não movimento depende exclusivamente do referencial adotado. Uma maneira superficial mas útil de definir o referencial seria

> Corpo ou ponto do qual um fenômeno físico é observado.

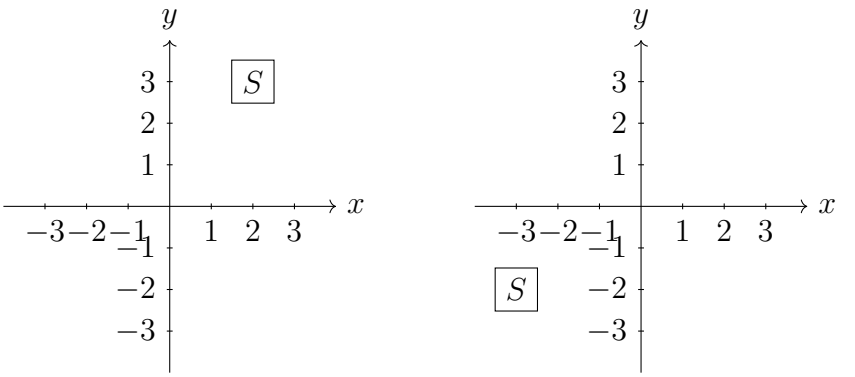
O referencial é o "ponto de vista" do qual uma realidade é observada. Dependendo do referencial teremos distintas situações físicas podendo ser descritas. Por exemplo, em uma viagem de carro ao longo de uma estrada, de forma comum colocamos o referencial na Terra e dizemos que o carro se movimenta ao longo da estrada. Se colocarmos o referencial no carro, poderíamos dizer que a estrada se movimenta por baixo das rodas do veículo. Ao ver um objeto caindo de uma certa altura dizemos que este objeto se movimenta em direção ao solo. Isso pois novamente temos o senso comum de colocar o referencial na Terra. Mas se colocarmos o referencial no objeto poderíamos dizer que a Terra que se movimenta em direção a esse. E ambas as descrições estão corretas. Embora ocorram diferentes explicações para um mesmo fenômeno em diferentes referenciais, em todas essas situações as regras da física são respeitadas e são as mesmas. Não confunda essa relação com a possibilidade de haver mais de um fenômeno físico ocorrendo simultaneamente dependendo do referencial adotado. Isso realmente não ocorre (ao menos na mecânica clássica). Algo pode estar se movimentando em relação a um referencial ou não estar se movimentando em relação a outro. Mas o fenômeno físico é o mesmo. O que está mudando é o referencial adotado. Com a mudança do referencial podemos ter diferentes cálculos mas todos se complementam quando analisados os diferentes referenciais. Neste momento temos então uma das partes mais complexas para o entendimento da física, aceitar que um mesmo fenômeno pode ter diferentes pontos de vista e descrições mas que todas as formas diferentes de descrever este devem se equivaler e explicar um único fenômeno.

Logo, para analisar se existe algum movimento, primeiro precisamos determinar o referencial. Este será nosso ponto fixo ao qual observaremos o fenômeno que estamos analisando. Tudo depende deste referencial adotado. Até que nos seja útil analisar de outra maneira, nosso referencial será sempre estático, ou seja, estará parado. Todos os fenômenos que observaremos estarão ocorrendo em relação a esta afirmação. Logo, para haver **movimento**, algo deve alterar sua distância em relação ao nosso referencial ou estar em movimento circular ao redor deste referencial. Também é útil que nosso referencial seja colocado na origem do sistema de coordenadas. Mas ter um referencial estático e na origem do sistema não é regra que deve sempre ser seguida e nem a melhor forma de observar todos os tipos de movimentos. Por enquanto, seguiremos essas premissas por serem úteis nos movimentos mais simples, os quais serão nossos primeiros objetos de estudo.

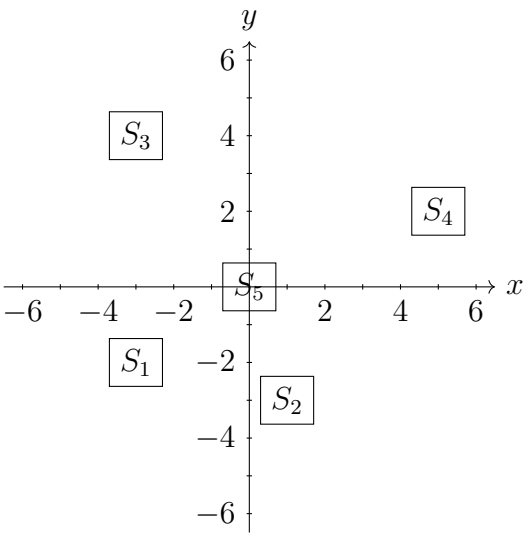
Sabendo então o conceito de referencial, podemos adotar um sistema de coordenadas e determinar posições. Por exemplo, se nossa posição for em relação a um sistema de coordenadas unidimensional e tiver valor $S = 2$, ou se a posição tiver valor $S = -1$, ou ainda se dissermos que a posição está na origem, teremos, respectivamente,



Caso estejamos falando de um sistema bidimensional teremos que ter duas coordenadas para a posição onde em uma delas teremos o valor para a coordenada x e na outra de y. Ou seja, $S = (x, y)$. Assim, por exemplo, para $S = (2, 3)$ ou para $S = (-3, -2)$, temos



Sendo assim, podemos ter distintas posições, por exemplo $S_1 = (-3, -2)$, $S_2 = (1, -3)$, $S_3 = (-3{,}4)$, $S_4 = (5{,}2)$ e $S_5 = (0{,}0)$, representadas em um mesmo sistema de coordenadas



Sabemos agora como definir uma certa posição em um dado sistema de coordenadas. Em um primeiro momento estudaremos movimentos em sistema de coordenadas unidimensionais, porém já temos o conhecimento necessário para estudar movimentos mais complexos, que faremos na sequência, onde analisaremos movimentos simultâneos em duas dimensões.

1.3.3 Corpo pontual e corpo extenso

É importante saber **diferenciar** um **corpo pontual** de um **corpo extenso**. Consideramos corpo **pontual** aquele que o comprimento do **corpo** é **muito menor** do que o comprimento do **movimento** que está sendo analisado. Ou seja, quando podemos **desprezar** o tamanho do corpo consideramos este um corpo pontual. Quando **não é possível** desconsiderar o tamanho do corpo, chamamos este de corpo **extenso**. Um mesmo corpo **pode ser pontual ou extenso**. Depende do tamanho do movimento ao qual o corpo está envolvido. Por exemplo, uma formiga atravessando uma ponte certamente podemos considerar como corpo pontual, já que o comprimento da ponte é muito maior que o da formiga. Já se consideramos a mesma formiga se movimentando sobre um prego, tratamos esta como um corpo extenso, visto que o tamanho de um prego não é tão maior quanto o da formiga. Da mesma forma, um trem viajando entre duas cidades muito distantes pode ser considerado um corpo pontual. Mas o mesmo trem atravessando uma ponte deve ser considerado como corpo extenso. Tudo vai depender das proporções do movimento em relação ao corpo em questão. Quando não for apresentado comprimento para os corpos, tratamos estes como pontuais. Sendo apresentados valores para os mesmos, devemos ter atenção sobre a proporção destes em relação ao movimento.

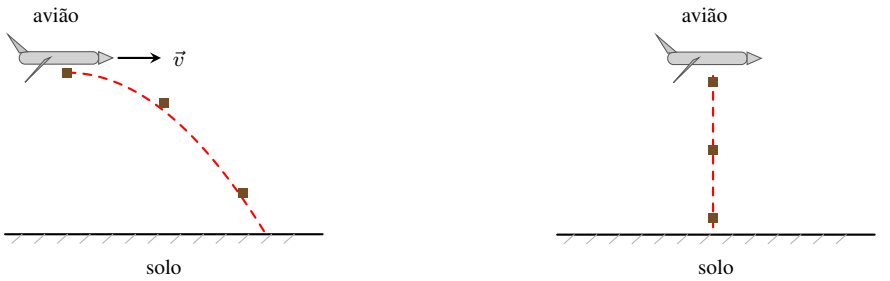
1.4 Trajetória, deslocamento e distância

1.4.1 Trajetória

Um conceito importante para analisar e entender um movimento é a noção a respeito de sua **trajetória**.

> **Trajetória** consiste do "desenho" formado pela sucessiva mudança de posição, ao longo do tempo, de um corpo em movimento através de um referencial específico.

Existem vários tipos diferentes de trajetórias para diversos movimentos distintos. Por exemplo, trajetória retilínea, curvilínea, circular, elíptica e outras. Além disso, podemos até mesmo ter mais de uma trajetória para um mesmo movimento. Essa afirmação é correta pois a trajetória também depende do referencial de observação. Ou seja, um movimento observado por um referencial descreverá uma trajetória diferente da descrita em um outro referencial de observação com velocidade distinta. Imagine um pacote que cai de um avião que se movimenta com uma certa velocidade. Para um observador parado na superfície da Terra o pacote cairá descrevendo uma trajetória parabólica enquanto que o piloto do avião verá o pacote caindo em movimento retilíneo para baixo. Outra situação de fácil assimilação seria alguém andando pela neve. As pegadas descreveriam os pontos pelos quais a pessoa passou ao longo do tempo, e o conjunto destas formariam então a trajetória do movimento deste homem.



(a) visto do solo: parábola (b) visto do avião: reta vertical

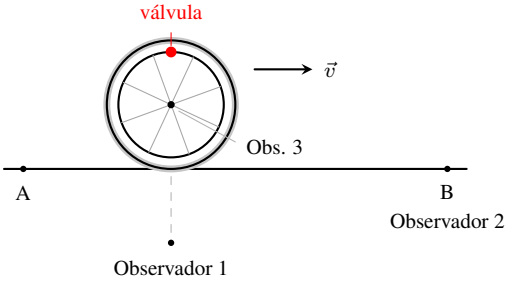
Figura 1.1: Trajetórias distintas para o mesmo movimento, conforme o referencial.

Exemplo 1.2

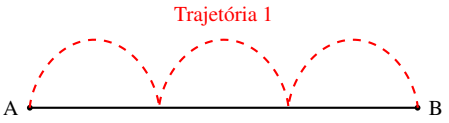
Imagine o movimento de uma bicicleta onde na roda dianteira o pneu tenha uma válvula, cuja trajetória será representada pela cor vermelha. Supondo que a bicicleta esteja se movimentando de um ponto **A** para um ponto **B** em uma linha reta. Como seria a trajetória descrita pela válvula vista por um

observador que está nas seguintes posições:

- Observador 1: Perpendicular à linha AB.
- Observador 2: Sobre o ponto B.
- Observador 3: No centro da roda dianteira.



O observador 1 irá ver a válvula fazendo um movimento de semicírculo ao longo do caminho AB. O observador 2 irá ver a válvula somente subindo e descendo sucessivamente enquanto a bicicleta se movimenta em sua direção. Por fim, o observador 3 irá ver a válvula fazer um movimento circular ao seu redor. Note que o movimento é o mesmo, mas ao ser observado de 3 diferentes referenciais a trajetória muda para cada um destes.



Observador 1 (perpendicular à reta AB): sucessão de arcos



Observador 2 (sobre o ponto B): sobe e desce



Observador 3 (no centro da roda): circunferência

1.4.2 Deslocamento e distância percorrida

É necessário saber diferenciar os conceitos **deslocamento** e **distância percorrida**. No dia a dia é comum confundir quando usamos estas expressões. Mas na física elas designam situações próximas mas distintas. O **deslocamento** é a **diferença espacial entre uma posição inicial e uma posição final** enquanto que

a **distância percorrida** leva em conta **todas as posições** pelas quais um corpo passou. Por exemplo, supondo um carro de corrida em uma pista onde a posição inicial seja a linha de largada, que é exatamente a mesma linha de chegada que designará a posição final, ao concluir a corrida este carro terá tido deslocamento **nulo**, pois a posição de início é exatamente a mesma posição de fim do movimento, portanto não há variação de posição e com isso não ocorreu deslocamento no movimento. Porém a distância percorrida levará em conta todas as posições pelas quais o carro passou. Com isso, se for uma pista de $2\,\mathrm{km}$ e o carro deu 50 voltas entre a largada e chegada, a distância percorrida será de $50 \times 2\,\mathrm{km} = 100\,\mathrm{km}$. Perceba que sendo o mesmo movimento as grandezas possuem valores diferentes por se tratarem de características diferentes. Ainda é possível salientar que a **distância percorrida depende da trajetória do movimento** enquanto que o **deslocamento não depende da trajetória**, depende somente da posição inicial e final do movimento. Ambas as características somente serão iguais quando se tratar de um movimento retilíneo e não houver inversão no sentido do movimento. Ou seja, quando o movimento partir de uma posição inicial e for até uma posição final em linha reta sem inverter em nenhum instante o seu sentido. Neste caso teremos distância percorrida e deslocamento idênticos em módulo.

Há ainda uma outra diferença entre estes conceitos. O **deslocamento** tem característica **vetorial** enquanto que a distância percorrida não depende da informação de direção e sentido, ou seja, é **escalar**. Na situação em que o movimento é unidimensional, como visto no Volume 1, o deslocamento pode ser tratado como um escalar, pois como sabemos em sistemas unidimensionais somente há uma direção (a do próprio sistema) e o sentido estará associado ao sistema de coordenadas escolhido. Assim, iniciaremos nossos estudos fazendo uso de uma condição específica do deslocamento, levando em conta somente sua característica em sistemas unidimensionais. Nesta situação chamamos de **deslocamento escalar**.

Matematicamente podemos definir o **deslocamento escalar** da seguinte forma

DESLOCAMENTO ESCALAR

$$\Delta S = S_f - S_0 \tag{1.1}$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$\Delta S \rightarrow$ deslocamento escalar (variação de posição)
$S_f \rightarrow$ posição final
$S_0 \rightarrow$ posição inicial

ou seja, o **deslocamento escalar** ou **variação de posição** (ΔS)[1] é dada pela

[1] O uso da letra grega *delta* (Δ) sempre estará relacionado à variação. E variação será sempre uma característica final menos a inicial. Usaremos o (Δ) associado a diferentes grandezas físicas ao longo de nossos estudos, mas este sempre será o equivalente à variação das grandezas às quais está associado.

posição final (S_f) menos a **posição inicial** (S_0)[2].

Para a distância percorrida faremos uso da letra (d). Em situações de movimentos em que o deslocamento coincide em módulo com a distância percorrida, não há diferença matemática entre o uso de (ΔS) ou (d). Mas faremos nossas definições futuras preferencialmente com o uso do deslocamento escalar (ΔS).

Exemplo 1.3

Um corpo tem seu movimento sobre um sistema de coordenadas unidimensional partindo da origem do sistema, indo até a posição $5\,\mathrm{m}$ e por fim se movendo até a posição $-7\,\mathrm{m}$. Qual foi o deslocamento e a distância percorrida pelo corpo neste movimento?

Dados do problema

$$\begin{aligned} S_0 &= 0\,\mathrm{m} \\ S_1 &= 5\,\mathrm{m} \\ S_f = S_2 &= -7\,\mathrm{m} \\ \Delta S &= ? \\ d_t &= ? \end{aligned}$$

Para o deslocamento somente nos interessa a posição inicial e final do movimento, logo

$$\begin{aligned} \Delta S &= S_f - S_0 \\ \Delta S &= -7\,\mathrm{m} - 0\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Logo, o deslocamento foi

$$\boxed{\Delta S = -7\,\mathrm{m}}$$

Mas a distância percorrida leva em conta toda movimentação. Da origem até a posição S_1, temos $d_1 = 5\,\mathrm{m}$ e da posição S_1 até a posição S_2 temos $d_2 = 12\,\mathrm{m}$. Perceba que mesmo indo para o sentido negativo do eixo de coordenadas, isso não é levado em conta. Somente levamos em conta qual foi a distância percorrida neste movimento. Sabendo todas as distâncias percorridas em cada etapa do movimento temos:

$$\begin{aligned} d_t &= d_1 + d_2 \\ d_t &= 5\,\mathrm{m} + 12\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

[2] O subíndice $_0$, como por exemplo em S_0, sempre simboliza início ou origem daquela grandeza à qual esse subíndice está atrelado.

Logo, a distância total percorrida é

$$\boxed{d_t = 17\,\mathrm{m}}$$

1.5 Tempo

O tempo é uma das grandezas físicas básicas com que convivemos, sabemos usar no dia a dia, mas que possui suas peculiaridades. Na física clássica e de maneira corriqueira tratamos o tempo como algo constante, que transcorre de maneira que nada possa interferir e em um único sentido. Vemos como uma grandeza física a qual em nada podemos interferir. Como maneira de medir o tempo, primeiro usamos padrões que se repetem e acreditamos serem imutáveis. Denotamos então que o planeta Terra leva $24\,\mathrm{h}$ para completar uma volta e baseado nisso criamos uma escala de tempo de fácil convívio. Também percebemos que a Terra completa uma volta no Sol em aproximadamente $365\mathrm{dias}$ e novamente usamos isso como base para medir o tempo. Mas após um período de comparação e estudos foi verificado que estes padrões não eram tão exatos e sofriam pequenas variações ao longo de muito tempo transcorrido. Também foi necessário cada vez uma maior exatidão para tempos muito pequenos e muito grandes, logo se fez necessário estabelecer um padrão que hoje acreditamos ser imutável. Com isso, a definição de tempo hoje é baseada na seguinte afirmação

> Um **segundo** é o intervalo de tempo em que ocorrem 9.192.631.770 oscilações da luz emitida por um átomo de Césio 133 em um determinado comprimento de onda.

Novamente não se faz necessário decorar essa definição mas sim entender que, por acreditarmos que essa definição não se altera em nenhum local do universo tampouco ao longo do tempo, ela pode ser usada e será imutável.

Seguimos usando o conceito de dias, horas, minutos e segundos em nosso dia a dia. Mas sabemos que os padrões antes usados não são consistentes. No Sistema Internacional a unidade de tempo é o **segundo** [s] e sabemos que esta grandeza é do tipo **escalar** por não necessitar de informações como direção e sentido. Conhecer sua relação com outras unidades corriqueiras é de vital importância para nossos estudos futuros. Por padrão, costumamos usar as seguintes relações:

- $1\,\mathrm{ano} = 365\,\mathrm{dias}$
- $1\mathrm{dia} = 24\,\mathrm{h}$
- $1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min}$
- $1\,\mathrm{min} = 60\,\mathrm{s}$

Para definição matemática usaremos t como símbolo da grandeza física **tempo**. Para estipular uma dada variação de tempo, podemos usar

VARIAÇÃO DE TEMPO

$$\Delta t = t_f - t_0 \tag{1.2}$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$\Delta t \rightarrow$ variação (intervalo) de tempo
$t_f \rightarrow$ instante final
$t_0 \rightarrow$ instante inicial

Exemplo 1.4

Sabendo que um movimento começou no dia 23/06 às 17:00h e terminou no dia 27/06 às 05:00. Qual foi a variação de tempo em dias, horas, minutos e segundos?

Dados do problema

$$t_0 = 23/06 - 17{:}00\,\mathrm{h}$$
$$t_f = 27/06 - 05{:}00\,\mathrm{h}$$
$$\Delta t = ?$$

A variação de 1 dia se dá quando temos variação total de 24h. Do início ao fim do período designado no problema, vemos que teríamos uma variação de 4 dias completos do dia 23 ao dia 27 caso o movimento se encerrasse também às 17:00h. Sendo assim, não foram completados 4 dias. Percebemos que faltaram 12h para completar 4 dias (17h menos 5h) e, sabendo que 12h é a metade de 1 dia (0,5 dia), foram ao total 3,5 dias.

$$\boxed{\Delta t = 3{,}5\mathrm{dia}}$$

Sabendo que 1 dia é dado por 24h, temos

$$\Delta t = 3{,}5 \cdot 24\,\mathrm{h}$$

Logo,

$$\boxed{\Delta t = 84\mathrm{h}}$$

Sendo 1 hora dado por 60 minutos, temos

$$\Delta t = 84 \cdot 60\,\mathrm{min}$$

Logo,

$$\boxed{\Delta t = 5040\text{min}}$$

tendo que 1 minuto dado por 60 segundos, temos

$$\Delta t = 5040 \cdot 60\,\text{s}$$

Logo,

$$\boxed{\Delta t = 302.400\text{s}}$$

1.6 Velocidade

Nossa terceira grandeza física a ser estudada é a **velocidade**. Esta se relaciona com as duas anteriores (comprimento e tempo) e basicamente é a responsável pelo comprimento que um objeto percorre em um determinado espaço de tempo. Por se tratar também de uma **grandeza vetorial** é tão importante conhecer seu módulo quanto sua direção e sentido. Sua unidade é o **metro por segundo** $[\text{m/s}]$.

1.6.1 Velocidade escalar média

Mesmo sendo a velocidade uma grandeza do tipo vetorial, quando a usamos em um sistema de coordenadas unidimensional ou simplesmente em um sistema onde somente seu módulo nos é importante, costuma-se trabalhar com sua característica escalar chamada de **velocidade escalar média**. Essa especificidade da velocidade nos é útil quando queremos saber com que rapidez ocorre um movimento, onde somente o ponto de partida, de chegada e o tempo gasto neste percurso nos é importante. Sendo assim, designamos como sendo dada por

VELOCIDADE ESCALAR MÉDIA

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t} \tag{1.3}$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$v_m \rightarrow$ velocidade escalar média
$\Delta S \rightarrow$ deslocamento escalar
$\Delta t \rightarrow$ intervalo de tempo

Sabemos que um tempo final (t_f) será sempre um valor maior que um dado tempo inicial (t_0). Com isso sempre teremos o valor de variação de tempo sendo positivo $\Delta t > 0$. Mas dependendo do sistema de coordenadas adotado, o movimento pode ser em um sentido positivo deste, ou seja, onde $S_f > S_0$ e com isso $\Delta S > 0$. Ou no sentido negativo deste sistema, ou seja, $S_f < S_0$ e com isso $\Delta S < 0$. Estas duas possibilidades podem atribuir um valor positivo $(+v_m)$ à

velocidade escalar média $v_m > 0$ ou negativo $(-v_m)$ à mesma $v_m < 0$. Desta relação de sinais surge nossa primeira forma de classificação de um movimento, onde temos:

- Movimento Progressivo $v_m > 0$.
- Movimento Regressivo (ou retrógrado) $v_m < 0$.

Como o próprio nome do movimento já dá a entender, no caso de movimento progressivo $(+v_m)$ este corpo está progredindo no sistema de coordenadas, ou seja, indo para posições maiores. No caso de um movimento regressivo (ou retrógrado) $(-v_m)$ o corpo está indo para valores menores de posição.

Exemplo 1.5

Qual a velocidade escalar média em $\mathrm{m/s}$ e $\mathrm{km/h}$ de um carro que se desloca $2{,}4\,\mathrm{km}$ em um tempo de $2\,\mathrm{min}$?

Dados do problema

$$\Delta S = 2{,}4\,\mathrm{km} = 2{,}4 \cdot 1000\,\mathrm{m} = 2400\,\mathrm{m}$$
$$\Delta t = 2\,\mathrm{min} = 2 \cdot 60\,\mathrm{s} = 120\,\mathrm{s}$$
$$v_m = ?$$

Uma dica é sempre analisar quais as conversões de unidades são mais simples de serem realizadas considerando os dados iniciais. Neste caso, como o tempo era bem menor que 1 hora, é melhor transformar para encontrar o resultado em $\mathrm{m/s}$ e após converter para $\mathrm{km/h}$.

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$
$$v_m = \frac{2400\,\mathrm{m}}{120\,\mathrm{s}}$$
$$\boxed{v_m = 20\mathrm{m/s}}$$

Considerando que $1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m}$, ou seja $\mathrm{m} = \frac{1}{1000}\,\mathrm{km}$. E que $1\,\mathrm{h} = 60\,\mathrm{min} = 60 \cdot 60\,\mathrm{s} = 3600\,\mathrm{s}$, ou seja $\mathrm{s} = \frac{1}{3600}\,\mathrm{h}$

$$v_m = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$
$$v_m = 20 \cdot \frac{\frac{1}{1000}\,\mathrm{km}}{\frac{1}{3600}\,\mathrm{h}}$$
$$v_m = 20 \cdot \frac{3600}{1000}\,\mathrm{km/h}$$

$$v_m = 20 \cdot 3{,}6\mathrm{km/h}$$

$$\boxed{v_m = 72\mathrm{km/h}}$$

Para transformar de $\mathrm{m/s}$ para $\mathrm{km/h}$ é preciso somente multiplicar por 3,6 e para transformar de $\mathrm{km/h}$ para $\mathrm{m/s}$ somente é preciso dividir por 3,6.

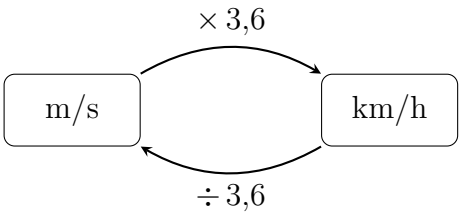


Figura 1.2: Conversão entre $\mathrm{m/s}$ e $\mathrm{km/h}$.

1.6.2 Velocidade instantânea

Embora a velocidade esteja relacionada com o comprimento e tempo, a mesma não é dependente destes e sim uma característica própria de um corpo em movimento. Isso significa dizer que não é necessário haver passagem de tempo tampouco mudança de posição para haver velocidade em um corpo. Mudança de posição é uma consequência da velocidade e não um pré-requisito para velocidade. Esta confusão surge da definição de velocidade escalar média. Mas esta é só uma característica da velocidade e não sua definição. Disso podemos perceber que um corpo em movimento, possui em um certo instante, uma característica que chamamos de **velocidade instantânea**. Essa segue sendo uma grandeza vetorial com módulo, direção e sentido. Mas quando falamos de velocidade instantânea não necessitamos associá-la à passagem do tempo ou mudança de posição. Percebemos a velocidade instantânea quando estamos em um veículo e olhamos o seu velocímetro. O velocímetro faz a marcação do quão rápido o veículo está naquele exato instante de tempo. Durante um percurso de carro este tem muitas diferentes velocidades instantâneas ao longo do tempo. O conjunto desses valores de velocidade instantânea terá influência no movimento total e serão responsáveis pela velocidade escalar média quando contabilizarmos todo o percurso. Não usaremos velocidade instantânea diretamente em nossos cálculos mas conhecer essa definição é importante na compreensão da grandeza física velocidade.

Exemplo 1.6

Um carro percorre uma estrada retilínea de $180\,\mathrm{km}$, sempre no sentido positivo, e leva $3\,\mathrm{h}$ entre a partida e a chegada. Nesse tempo está incluída uma

parada para abastecer. O velocímetro indicou $110\,\mathrm{km/h}$ em certo trecho e zero durante a parada. Qual é a velocidade escalar média da viagem? Como ela se relaciona com essas duas leituras?

Dados do problema

$$\Delta S = 180\,\mathrm{km}$$
$$\Delta t = 3\,\mathrm{h}$$
$$v_m = ?$$

Como não houve inversão de sentido, o deslocamento escalar coincide com a distância percorrida. Dividimos esse deslocamento pelo tempo completo da viagem, incluindo a parada:

$$v_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$
$$v_m = \frac{180\,\mathrm{km}}{3\,\mathrm{h}}$$

$$\boxed{v_m = 60\mathrm{km/h}}$$

Encontramos $60\,\mathrm{km/h}$ para o intervalo inteiro. As leituras de $110\,\mathrm{km/h}$ e zero descrevem apenas dois momentos da viagem, por isso não precisam coincidir com a média. O velocímetro pode ter indicado $60\,\mathrm{km/h}$ em outros instantes; os dados não excluem essa possibilidade. Note que, mantendo essa rapidez durante as três horas, sem parar nem inverter o sentido, o carro percorreria os mesmos $180\,\mathrm{km}$.

1.7 Aceleração

Como última grandeza física que iremos estudar, de modo a poder conhecer toda cinemática, temos a **aceleração**. Essa **grandeza vetorial** que tem como unidade o **metro por segundo ao quadrado** $[\mathrm{m/s^2}]$ é responsável pela variação da velocidade de um corpo ao longo do tempo, na mesma proporção que a velocidade é responsável pela variação de posição ao longo do tempo.

1.7.1 Aceleração escalar média

Assim como a velocidade, ainda que a aceleração seja uma grandeza vetorial, iremos primeiramente utilizar sua característica em um sistema de coordenadas unidimensional. Dessa forma, levaremos em conta somente seu valor numérico

(módulo) e assim estaremos utilizando a **aceleração escalar média**.

ACELERAÇÃO ESCALAR MÉDIA

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{1.4}$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$a_m \rightarrow$ aceleração escalar média
$\Delta v \rightarrow$ variação de velocidade
$\Delta t \rightarrow$ intervalo de tempo

Onde a **variação de velocidade**

VARIAÇÃO DE VELOCIDADE

$$\Delta v = v_f - v_0 \tag{1.5}$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$\Delta v \rightarrow$ variação de velocidade
$v_f \rightarrow$ velocidade final
$v_0 \rightarrow$ velocidade inicial

somente existirá no caso em que houver aceleração escalar média no movimento. Assim como ocorre com a velocidade, existem nomenclaturas para os tipos de movimentos em função da aceleração. Porém essa nomenclatura não está associada ao sinal da aceleração, ou seja, a ela ser positiva ou negativa, como ocorre em relação à velocidade. E sim leva em conta o que a aceleração está fazendo com o movimento. Caso a aceleração esteja **aumentando a rapidez** do movimento chamamos de **movimento acelerado** ao passo que se a aceleração estiver **freando o movimento** chamamos de **movimento retardado**. Esses dois tipos de movimento ocorrem nas seguintes situações:

- Movimento Acelerado:
  - $v_m > 0$ e $a_m > 0$ Movimento progressivo com aumento da velocidade positiva;
  - $v_m < 0$ e $a_m < 0$ Movimento regressivo com aumento da velocidade negativa;
- Movimento Retardado:
  - $v_m > 0$ e $a_m < 0$ Movimento progressivo com diminuição da velocidade positiva;
  - $v_m < 0$ e $a_m > 0$ Movimento regressivo com diminuição da velocidade negativa;

Ou seja, quando velocidade e aceleração possuem ambas o **mesmo sinal** o **movimento é acelerado** e quando ambas possuem **sinais opostos** o **movimento é**

retardado.

Exemplo 1.7

Sabendo que um veículo com velocidade de $10\,\mathrm{m/s}$ sofre uma aceleração e após $15\,\mathrm{s}$ se encontra com velocidade de $55\,\mathrm{m/s}$. Determine a qual valor de aceleração escalar média este veículo foi submetido?

Dados do problema

$$\Delta v = v_f - v_0 = 55\,\mathrm{m/s} - 10\,\mathrm{m/s} = 45\,\mathrm{m/s}$$
$$\Delta t = 15\,\mathrm{s}$$
$$a_m = ?$$

Temos que

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$
$$a_m = \frac{45\,\mathrm{m/s}}{15\,\mathrm{s}}$$
$$\boxed{a_m = 3\mathrm{m/s}^2}$$

Exemplo 1.8

Um carro segue no sentido negativo de uma reta, com velocidade inicial de $-20\,\mathrm{m/s}$. Ao frear com aceleração constante, sua velocidade passa a $-8\,\mathrm{m/s}$ em $4\,\mathrm{s}$. Determine a aceleração escalar média e classifique o movimento quanto ao sentido e à variação da rapidez.

Dados do problema

$$v_0 = -20\,\mathrm{m/s}$$
$$v_f = -8\,\mathrm{m/s}$$
$$\Delta t = 4\,\mathrm{s}$$
$$a_m = ?$$

Primeiramente, calculamos a diferença entre as velocidades final e inicial. O sinal negativo de v_0 precisa ser mantido na substituição:

$$\Delta v = v_f - v_0 = -8\,\mathrm{m/s} - (-20\,\mathrm{m/s}) = -8\,\mathrm{m/s} + 20\,\mathrm{m/s} = 12\,\mathrm{m/s}$$

Dividindo essa variação pelo intervalo de tempo, conforme a equação 1.4, obtemos

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$
$$a_m = \frac{12\,\mathrm{m/s}}{4\,\mathrm{s}}$$
$$\boxed{a_m = 3\mathrm{m/s}^2}$$

Como a aceleração é constante, o valor médio também é o valor instantâneo durante a frenagem. Temos $a = +3\,\mathrm{m/s}^2$ e $v < 0$ em todo o intervalo: o movimento é **regressivo**. A rapidez cai de $20\,\mathrm{m/s}$ para $8\,\mathrm{m/s}$, portanto o movimento é também **retardado**. Perceba que o sinal positivo da aceleração indica seu sentido no eixo escolhido, e não um aumento obrigatório da rapidez.

1.7.2 Aceleração instantânea

De modo análogo à velocidade, a aceleração é também uma característica própria do corpo e dada a cada momento. Nessa situação chamamos de **aceleração instantânea**. Enquanto a aceleração escalar média somente leva em conta o valor da variação de velocidade em um certo espaço de tempo, a aceleração instantânea é dada em um momento infinitesimal e é essa a responsável pelo modo como o corpo irá se comportar naquele exato momento. O conjunto das diferentes acelerações instantâneas em um determinado período de tempo será responsável pela aceleração escalar média naquele período.

Síntese do capítulo

A **cinemática** descreve o movimento sem se ocupar de suas causas. Toda medida usa **grandezas físicas** e suas **unidades**, padronizadas no S.I., que podem ser **escalares**, quando ficam determinadas somente pelo módulo, ou **vetoriais**, quando exigem módulo, direção e sentido. Para descrever um movimento, começamos pela escolha do **referencial** e das coordenadas. A posição localiza o corpo e a trajetória reúne as posições ocupadas ao longo do tempo. O deslocamento liga as posições inicial e final, enquanto a distância percorrida contabiliza todo o caminho. Em uma reta, usamos $\Delta S = S_f - S_0$, $v_m = \Delta S/\Delta t$ e $a_m = \Delta v/\Delta t$, sempre com atenção aos sinais e às unidades. A rapidez média é $d/\Delta t$. Os valores instantâneos de velocidade e aceleração descrevem cada momento do movimento; os valores médios se referem a um intervalo.

Lista de exercícios 1

1. O que é uma grandeza física?
2. Quais tipos de grandezas físicas estudamos no ensino médio? Explique cada uma delas.
3. O que é uma unidade na física? Qual a relação entre unidade e grandeza física?
4. O que é o Sistema Internacional? Para que serve este sistema? Cite três grandezas físicas e suas unidades no S.I.
5. O que são unidades derivadas? Cite três grandezas e suas unidades derivadas no S.I.
6. Cite três grandezas físicas cujas unidades são nomes próprios. Mostre a relação destas unidades com as unidades básicas.
7. O que é um prefixo? Quais prefixos que você mais conhece (cite ao menos três).
8. Escreva usando notação científica e prefixos os seguintes valores:
   - $1500\,\mathrm{m}$
   - $0{,}000001\,\mathrm{m}$
   - $120\,\mathrm{m}$
   - $0{,}02\,\mathrm{m}$
   - $0{,}007\,\mathrm{m}$
   - $0{,}000000000000005\,\mathrm{m}$
   - $5.545.000.000.000\,\mathrm{m}$
9. O que é referencial?
10. Qual a diferença entre corpo pontual e corpo extenso?
11. O que é trajetória? Cite exemplos e desenhe duas diferentes trajetórias para um mesmo movimento.
12. Qual a diferença entre distância percorrida e deslocamento?
13. Transforme para metros os seguintes valores:
    - $1200\,\mathrm{km}$
    - $0{,}2\,\mathrm{km}$
    - $250\,\mathrm{cm}$
    - $0{,}4\,\mathrm{cm}$
    - $425.000\,\mathrm{mm}$
    - $25\,\mathrm{mm}$
    - $2\,\mu\mathrm{m}$
    - $1.000.000\,\mu\mathrm{m}$
14. Um corpo se movimenta em um sistema unidimensional e parte de um ponto

inicial $S_0 = 5\,\mathrm{m}$, se desloca até um ponto $S_1 = 25\,\mathrm{m}$ e após até um ponto final $S_2 = -10\,\mathrm{m}$. Qual o deslocamento e distância percorrida por este móvel?

15. No dia 16/07/1969 parte de Cabo Canaveral, rumo à Lua, o foguete da missão Apollo 11. Partindo exatamente às 13h32min00s (UTC). O pouso na Lua ocorre no dia 20/07/1969 às 20h17min40s (UTC). Qual tempo total de viagem até a Lua? (Resposta em dias, horas, minutos e segundos. ex.: 2 dias, 15 h, 40 min e 16 s). Qual tempo total em segundos?
16. Qual a diferença entre velocidade, velocidade escalar média e velocidade instantânea?
17. Um corpo que está parado na posição $S_0 = -5\,\mathrm{m}$ inicia seu movimento e após $20\,\mathrm{s}$ finaliza na posição $S_1 = 395\,\mathrm{m}$. Qual a velocidade escalar média em $\mathrm{m/s}$ e $\mathrm{km/h}$?
18. Transforme para $\mathrm{m/s}$:
    - $36\,\mathrm{km/h}$
    - $18\,\mathrm{km/h}$
    - $7200\,\mathrm{m/h}$
    - $1800\,\mathrm{m/h}$
    - $250\,\mathrm{cm/s}$
    - $900.000\,\mathrm{cm/h}$
19. Qual a diferença entre aceleração, aceleração escalar média e aceleração instantânea?
20. O que é um movimento progressivo?
21. O que é um movimento regressivo?
22. O que é um movimento acelerado?
23. O que é um movimento retardado?
24. Um corpo que se movimenta em um sistema unidimensional passa pela posição $S_0 = 10\,\mathrm{m}$ com velocidade de $10\,\mathrm{m/s}$. Após $5\,\mathrm{s}$ passa pela posição $S_1 = 110\,\mathrm{m}$ com velocidade de $30\,\mathrm{m/s}$. Segue seu movimento até parar na posição $S_2 = 560\,\mathrm{m}$, $30\,\mathrm{s}$ depois de passar por S_1.
    - Qual a aceleração escalar média desenvolvida pelo corpo entre as posições S_0 e S_1?
    - Qual a aceleração escalar média desenvolvida pelo corpo entre as posições S_1 e S_2?
    - Qual a aceleração escalar média desenvolvida pelo corpo entre as posições S_0 e S_2?
    - Qual o tipo de movimento (progressivo ou regressivo - acelerado ou retardado) entre as posições S_0 e S_1?
    - Qual o tipo de movimento (progressivo ou regressivo - acelerado ou retardado) entre as posições S_1 e S_2?

2

Movimento Uniforme

O que você vai aprender

- Identificar movimentos retilíneos com velocidade constante e aceleração nula.
- Usar a equação horária para relacionar posições e instantes.
- Obter informações do movimento em gráficos e representar neles os dados conhecidos.
- Determinar onde e quando dois corpos se encontram ou se ultrapassam.
- Relacionar velocidades medidas em diferentes referenciais numa mesma direção.

Por que estudamos isto? Vamos começar por uma situação em que a velocidade não muda. Conhecendo a posição inicial, poderemos calcular onde o corpo estará depois de certo tempo e representar esse movimento em gráficos. Esse modelo também nos permitirá resolver encontros, ultrapassagens e travessias.

2.1 O que é o movimento uniforme

Obviamente que começaremos a estudar os movimentos partindo do modelo mais simples. E esse é o **movimento uniforme** (MU). Este movimento possui este nome por ter sempre o mesmo valor de velocidade, ou seja, não há aceleração. Consideraremos o mesmo ocorrendo em um **sistema unidimensional** para **não criar problemas vetoriais** em nossos cálculos. Assim, matematicamente temos as seguintes definições para este movimento:

$$\Delta v = 0\mathrm{m/s} \qquad \text{e, por consequência} \qquad a = 0\,\mathrm{m/s^2}$$

Assim, teremos um movimento que terá uma **posição de origem** S_0, uma posição final S, uma velocidade escalar média v que será constante e um tempo t que corresponderá ao tempo de duração do movimento. O diferencial deste movimento é

Não possuir **variação de velocidade**, ou seja, ter **aceleração nula**.

2.2 Equação horária da posição

No estudo dos movimentos é importante poder dizer qual será a posição do móvel para qualquer tempo em questão. Assim, costumamos usar uma **equação horária** para descrever movimentos. Uma equação horária simplesmente descreve os movimentos para diferentes tempos. Lembrando da equação da velocidade

escalar média 1.3[1], temos

$$\begin{aligned} v &= \frac{\Delta S}{\Delta t} \\ v &= \frac{S - S_0}{t} \\ v \cdot t &= S - S_0 \\ S_0 + v \cdot t &= S \end{aligned}$$

Assim, simplesmente manipulando a equação da velocidade escalar média, encontramos a **equação horária da posição** para o **movimento uniforme**

EQUAÇÃO HORÁRIA DO MU

$$S = S_0 + v \cdot t \tag{2.1}$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

- $S \rightarrow$ posição no instante t
- $S_0 \rightarrow$ posição inicial
- $v \rightarrow$ velocidade escalar média (constante)
- $t \rightarrow$ tempo decorrido

O entendimento da relação 2.1 é fundamental para todo estudo de física que será feito no ensino médio. Saber ler, interpretar, tirar e pôr os dados deste tipo de equação mostrará o quanto você está assimilando converter o que vemos na natureza em matemática e vice-versa. Perceba pela equação que, se for conhecida a posição de início do movimento (S_0) e a velocidade do móvel (v), podemos sempre saber uma nova posição (S) para um novo tempo (t). Por isso o nome de **equação horária**. Note que na equação horária consideramos o tempo inicial como sendo o tempo zero $(t_0 = 0\,\mathrm{s})$, logo $\Delta t = t - t_0 = t$. Dizemos que a posição é uma função do tempo $S(t)$. Para simplificar não será aqui usada a notação de função $S(t) = S_0 + v \cdot t$ e sim a notação apresentada em 2.1. Nos exemplos a seguir veremos o uso da equação 2.1 para descobrir a posição em diferentes tempos e como extrair os dados observando essa equação.

Exemplo 2.1

Dado um movimento que parte da posição $5\,\mathrm{m}$ com velocidade constante $v = 3\,\mathrm{m/s}$. Qual a posição do corpo nos tempos $3\,\mathrm{s}$, $15\,\mathrm{s}$ e $95\,\mathrm{s}$ após o início do movimento?

[1] Para simplificação da notação, a partir deste momento usaremos para a velocidade escalar média a simbologia (v) ao invés de (v_m).

Dados do problema

$$S_0 = 5\,\text{m}, \quad v = 3\,\text{m/s}, \quad t_1 = 3\,\text{s}, \quad t_2 = 15\,\text{s}, \quad t_3 = 95\,\text{s}$$

O propósito da equação horária da posição é justamente determinar a posição, em diferentes tempos, para um mesmo movimento com características iniciais bem determinadas. Portanto, usando a equação 2.1, para $t_1 = 3\,\text{s}$ temos

$$S = S_0 + v \cdot t$$
$$S = 5\,\text{m} + 3\frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}} \cdot 3\cancel{\text{s}} = 5\,\text{m} + 9\,\text{m}$$

$$\boxed{S = 14\,\text{m}}$$

Para $t_2 = 15\,\text{s}$,

$$S = 5\,\text{m} + 3\frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}} \cdot 15\cancel{\text{s}} = 5\,\text{m} + 45\,\text{m}$$

$$\boxed{S = 50\,\text{m}}$$

Para $t_3 = 95\,\text{s}$,

$$S = 5\,\text{m} + 3\frac{\text{m}}{\cancel{\text{s}}} \cdot 95\cancel{\text{s}} = 5\,\text{m} + 285\,\text{m}$$

$$\boxed{S = 290\,\text{m}}$$

Exemplo 2.2

Dadas as seguintes equações horárias da posição no S.I., determine os dados possíveis.

a) $S = 3 + 5 \cdot t$
b) $S = 4 - 2 \cdot t$
c) $S = 7 \cdot t$
d) $S = 5 + t$
e) $S = -t$
f) $S = -8$

Basta comparar cada equação com a forma $S = S_0 + v \cdot t$.
a) $S = 3 + 5 \cdot t$:

$$S = \underbrace{\boxed{3}}_{=S_0} + \underbrace{\boxed{5}}_{=v} \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad S_0 = 3\,\text{m}, \quad v = 5\,\text{m/s}.$$

b) $S = 4 - 2 \cdot t$:

$$S = \underbrace{\boxed{4}}_{=S_0} + \underbrace{\boxed{-2}}_{=v} \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad S_0 = 4\,\text{m}, \quad v = -2\,\text{m/s}.$$

c) $S = 7 \cdot t = 0 + 7 \cdot t$:

$$S = \underbrace{\boxed{0}}_{=S_0} + \underbrace{\boxed{7}}_{=v} \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad S_0 = 0\,\text{m}, \quad v = 7\,\text{m/s}.$$

Se a equação não apresenta valor para S_0, logo esse é 0.
d) $S = 5 + t = 5 + 1 \cdot t$:

$$S = \underbrace{\boxed{5}}_{=S_0} + \underbrace{\boxed{1}}_{=v} \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad S_0 = 5\,\text{m}, \quad v = 1\,\text{m/s}.$$

Perceba que a equação é apresentada sem o número (1) multiplicando (t). Mas ainda assim o fator multiplicador de (t) é 1.
e) $S = -t = 0 - 1 \cdot t$:

$$S = \underbrace{\boxed{0}}_{=S_0} + \underbrace{\boxed{-1}}_{=v} \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad S_0 = 0\,\text{m}, \quad v = -1\,\text{m/s}.$$

O fator multiplicador de (t) é -1 para que na equação tenhamos $(-t)$.
f) $S = -8 = -8 + 0 \cdot t$:

$$S = \underbrace{\boxed{-8}}_{=S_0} + \underbrace{\boxed{0}}_{=v} \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad S_0 = -8\,\text{m}, \quad v = 0\,\text{m/s}.$$

Para não haver o termo (t) este deve estar sendo multiplicado por (0). Logo, não há movimento: o corpo está parado na posição $S = -8\,\text{m}$ e assim permanecerá por não ter velocidade. Este é o caso particular do **repouso**: a equação horária existe, mas com $v = 0\,\text{m/s}$, de modo que a posição não muda com o passar do tempo.

Exemplo 2.3

Monte a equação horária da posição para um corpo que parte de $S = 5\,\text{m}$ e após $2\,\text{s}$ está na posição $S = 19\,\text{m}$.

Dados do problema

$$S_0 = 5\,\mathrm{m}, \quad S(2\,\mathrm{s}) = 19\,\mathrm{m}, \quad t = 2\,\mathrm{s}$$

Para determinar a equação horária precisamos conhecer a posição de partida (S_0) (que já conhecemos) e também a velocidade (v). Assim, primeiro definimos o valor da velocidade usando 1.3

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S - S_0}{t}$$
$$v = \frac{19\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}} = \frac{14\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}}$$

logo

$$\boxed{v = 7\mathrm{m/s}}$$

Sabendo o valor da velocidade, a equação horária da posição para este movimento no S.I. é

$$S = S_0 + v \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{S = 5 + 7 \cdot t}$$

2.3 Gráficos no movimento uniforme

O uso de gráficos é comum e fundamental no estudo da física. Iremos agora começar a entender as informações expressas em um gráfico e relacionar estas com as equações que estamos trabalhando.

Dependendo das grandezas físicas atribuídas a cada eixo teremos diferentes leituras para um gráfico. Por exemplo, se estudarmos um gráfico de posição (S) ao longo do tempo (t) poderemos extrair várias informações, inclusive de grandezas que não estão presentes neste gráfico.

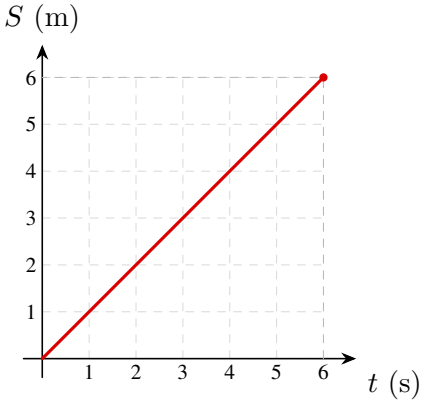


Figura 2.1: Gráfico de **posição** (S) no tempo (t).

Ao observar a figura 2.1 devemos notar que o **eixo** vertical traz a **informação** de ser referente à **posição** (S) e além disso, temos também qual **unidade** está sendo levada em conta (m). Se **não temos a informação da unidade** ficamos com **dificuldades** de fazer a real leitura do gráfico. O mesmo vale para o eixo horizontal (t) com unidade (s). Se somente sabemos as grandezas relacionadas a cada eixo temos problemas ao extrair dados deste gráfico, já que o movimento poderia ser de (km) por (s), que é uma velocidade muito grande. Ou poderia ser de (mm) por (h), que é uma velocidade muito pequena. Ao **ter definido a unidade** como sendo (m) e (s) **não há margem para interpretações**.

Agora ao analisar o traçado em **vermelho** na figura 2.1 podemos **extrair uma série de informações**. A primeira é que no tempo $(t = 0\,\mathrm{s})$ a posição é $(S = 0\,\mathrm{m})$. Logo, essa é nossa **posição inicial** do movimento $S_0 = 0\,\mathrm{m}$. Percebemos também que a cada espaço de tempo (Δt) ocorre o mesmo deslocamento (ΔS). Para isso ocorrer deve ter uma **velocidade constante** durante todo movimento. Assim, podemos ver que por se tratar de uma **reta** esse gráfico diz respeito a um **movimento uniforme**. Analisando a inclinação da **reta em vermelho** podemos perceber que, estando a mesma **apontando para cima**, a posição ao longo do tempo é cada vez maior, logo se trata de um movimento uniforme **progressivo**. Colhendo os dados podemos inclusive determinar o valor da velocidade. Por exemplo, sabendo que no tempo de $(t = 6\,\mathrm{s})$ o corpo se deslocou $(\Delta S = 6\,\mathrm{m})$, temos $v = \Delta S/\Delta t = 6\,\mathrm{m}/6\,\mathrm{s} = 1\,\mathrm{m/s}$. Sendo a velocidade constante sabemos também que $(a = 0\,\mathrm{m/s^2})$.

Concluímos que há **dados explícitos** (características de cada eixo e seus valores) e outros **implícitos** (tipo de movimento e valores de outras grandezas).

Poderíamos analisar também um gráfico com outras grandezas envolvidas, como por exemplo, velocidade (v) ao longo do tempo (t).

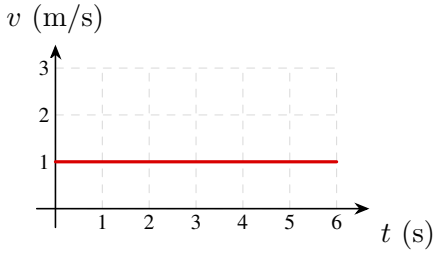


Figura 2.2: Gráfico de **velocidade** (v) no tempo (t).

Na figura 2.2 podemos ver as características explícitas (valor de velocidade $(v = 1\,\mathrm{m/s})$ constante ao longo do tempo) e outras implícitas (tipo de movimento e valor nulo de aceleração $(a = 0\,\mathrm{m/s^2})$), mas **não temos informações** sobre posição (S) ao longo do tempo (t).

Ainda poderíamos traçar gráficos com outros eixos, mas a lógica de leitura e interpretação seguem os mesmos fundamentos. Por exemplo, na figura 2.3

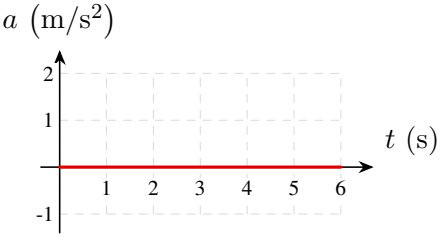


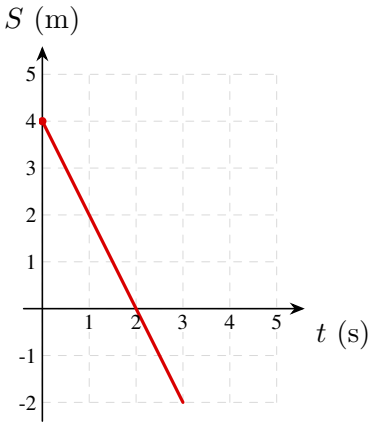
Figura 2.3: Gráfico de **aceleração** (a) no tempo (t).

podemos ver que a aceleração é nula $(a = 0\,\mathrm{m/s^2})$, logo se trata de um movimento uniforme, porém não temos informações sobre velocidade (v) e posição (S). Assim, concluímos que diferentes gráficos trazem diferentes informações. Saber **interpretar os gráficos** e **extrair todas as informações possíveis** é parte fundamental do estudo da física, da mesma forma, criar gráficos com as informações conhecidas é uma capacidade que deve ser constantemente desenvolvida.

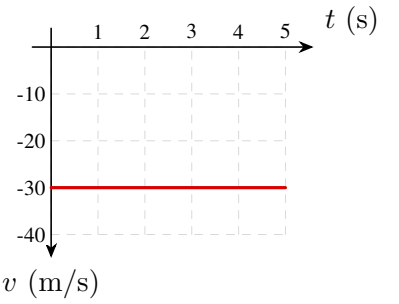
Exemplo 2.4

Extraia todos os dados possíveis dos gráficos abaixo:

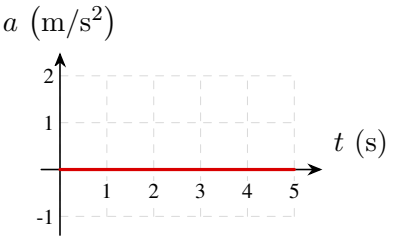
a)



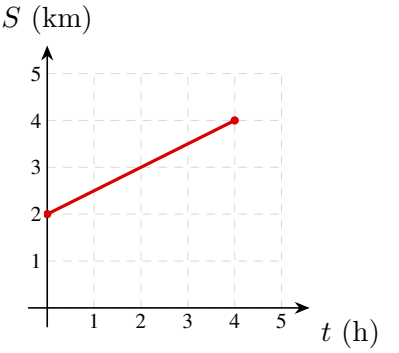
b)



c)



d)



No gráfico **a** temos um **movimento uniforme** (linha vermelha reta nos eixos (S) e (t)). É um movimento **regressivo** (inclinação da linha para baixo). A posição inicial é $S_0 = 4\,\mathrm{m}$ e no tempo $(t = 3\,\mathrm{s})$ o corpo está na posição $(S = -2\,\mathrm{m})$. A velocidade é

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S - S_0}{t - t_0} = \frac{-2\,\mathrm{m} - 4\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{s} - 0\,\mathrm{s}} = \frac{-6\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{s}}$$

$$\boxed{v = -2\,\mathrm{m/s}} \qquad \text{logo} \qquad \boxed{S = 4 - 2 \cdot t}$$

No gráfico **b** a linha vermelha da velocidade (v) mostra que essa tem sempre o mesmo valor $(v = -30\,\mathrm{m/s})$ ao passar do tempo. É um movimento uniforme **regressivo** (velocidade negativa). Não é possível descrever valores de posição, logo não é possível determinar a equação horária.

No gráfico **c** a linha vermelha da aceleração (a) mostra que essa tem sempre o mesmo valor nulo $(a = 0\,\mathrm{m/s^2})$. Não é possível descrever valores de posição ou velocidade, logo não é possível determinar a equação horária.

No gráfico **d** temos um **movimento uniforme progressivo** (linha reta em (S) e (t), inclinação para cima). A posição inicial é $S_0 = 2\,\text{km}$ e no tempo $(t = 4\,\text{h})$ o corpo está na posição $(S = 4\,\text{km})$. A velocidade é

$$v = \frac{S - S_0}{t - t_0} = \frac{4\,\text{km} - 2\,\text{km}}{4\,\text{h} - 0\,\text{h}} = \frac{2\,\text{km}}{4\,\text{h}}$$

$$\boxed{v = 0{,}5\,\text{km/h}} \qquad \text{logo} \qquad \boxed{S = 2 + 0{,}5 \cdot t}$$

2.4 Movimento com vários corpos e corpo extenso

Muitos problemas trazem vários corpos interagindo em um mesmo movimento. Estando estes sobre o mesmo sistema de coordenadas e adotando o mesmo referencial para analisarmos, podemos gerar diferentes modos de interação entre esses móveis.

Exemplo 2.5

Dois veículos, **A** e **B**, se movimentam com equações horárias $S_A = 4 + 3 \cdot t$ e $S_B = 7 + 1 \cdot t$ no S.I. Haverá algum momento em que os veículos chegarão à mesma posição? Se sim, em que momento após o início dos movimentos? E em qual posição ocorre a ultrapassagem?

Dados do problema

$$S_{0A} = 4\,\text{m}, \quad v_A = 3\,\text{m/s}, \qquad S_{0B} = 7\,\text{m}, \quad v_B = 1\,\text{m/s}$$

Primeiro devemos notar que a posição inicial (S_{0A}) de **A** é **menor** que (S_{0B}) de **B**. Ambos possuem velocidades positivas, logo são movimentos **progressivos**. Sendo a velocidade (v_A) de **A maior** que a (v_B) de **B**, é fácil concluir que em **algum momento** o corpo **A** irá **ultrapassar** o corpo **B**. Neste **exato momento da ultrapassagem** ambos estarão em uma **mesma posição** $(S_A = S_B)$. Logo, teremos que descobrir o **tempo** em que $S_A = S_B$:

$$\underbrace{\boxed{4 + 3 \cdot t}}_{=S_A} = \underbrace{\boxed{7 + 1 \cdot t}}_{=S_B}$$

$$4 + 3 \cdot t = 7 + 1 \cdot t$$

$$3t - 1t = 7 - 4$$

$$2t = 3 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{3}{2}$$

Assim, o tempo em que o veículo **A** ultrapassa o **B** será

$$\boxed{t = 1{,}5\,\mathrm{s}}$$

Para descobrir a **posição da ultrapassagem** basta usar o tempo em qualquer uma das duas equações horárias, pois neste tempo ambos estão na mesma posição. Usando a de **A**: $S_A = 4 + 3 \cdot 1{,}5 = 4 + 4{,}5$; usando a de **B**: $S_B = 7 + 1 \cdot 1{,}5 = 7 + 1{,}5$. Em ambas,

$$\boxed{S_A = S_B = 8{,}5\,\mathrm{m}}$$

Exemplo 2.6

Dois veículos que se movimentam em sentidos opostos irão colidir. O veículo **A** parte da posição $S = 19\,\mathrm{m}$ com velocidade constante $v = -3\,\mathrm{m/s}$. Já o veículo **B** parte da posição $S = -5\,\mathrm{m}$ com velocidade constante $v = 5\,\mathrm{m/s}$. Em que posição os veículos irão colidir?

Dados do problema

$$S_A = 19 - 3 \cdot t, \qquad S_B = -5 + 5 \cdot t$$

O veículo **A** se movimenta em direção à posição do veículo **B**. Logo, em uma posição S entre as posições iniciais de **A** e **B** ocorrerá a colisão. Para descobrir qual é essa posição devemos descobrir primeiro em que instante ambos chegam a uma posição em comum, ou seja, $t\,(S_A = S_B)$:

$$\underbrace{\boxed{19 - 3 \cdot t}}_{=S_A} = \underbrace{\boxed{-5 + 5 \cdot t}}_{=S_B}$$

$$19 - 3 \cdot t = -5 + 5 \cdot t$$

$$-3t - 5t = -5 - 19$$

$$8t = 24 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{24}{8} = 3\,\mathrm{s}$$

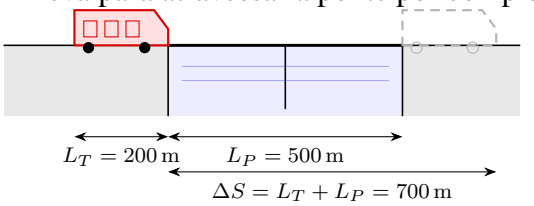
Usando a equação horária de qualquer um dos veículos, com $t = 3\,\mathrm{s}$:

$$S_A = 19 - 3 \cdot 3 = 19 - 9$$

$$\boxed{S_A = S_B = 10\,\mathrm{m}}$$

Exemplo 2.7

Um trem de comprimento $L_T = 200\,\mathrm{m}$ irá atravessar uma ponte de comprimento $L_P = 500\,\mathrm{m}$. Sabendo que a velocidade do trem é de $v_T = 126\,\mathrm{km/h}$, quanto tempo o trem leva para atravessar a ponte por completo?



Dados do problema

$$L_T = 200\,\mathrm{m}, \quad L_P = 500\,\mathrm{m}, \quad v_T = 126\,\mathrm{km/h}$$

Primeiro devemos notar que por se tratar de um **corpo extenso**, não podemos desconsiderar o **comprimento do trem**. É mais fácil transformar a velocidade do trem, que está em $(\mathrm{km/h})$, para $(\mathrm{m/s})$ do que alterar as distâncias que estão em (m). Assim,

$$v_T = \frac{126}{3{,}6}\,\mathrm{m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_T = 35\,\mathrm{m/s}}$$

Observando a figura, o trem chega até o outro lado da ponte quando percorre os $L_P = 500\,\mathrm{m}$ de comprimento da ponte, mas para **atravessar por completo** é necessário percorrer o restante de seu **próprio comprimento**. Logo,

$$\Delta S = L_T + L_P = 200\,\mathrm{m} + 500\,\mathrm{m} = 700\,\mathrm{m}$$

Usando 1.3,

$$v_T = \frac{\Delta S}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\Delta S}{v_T} = \frac{700\,\cancel{\mathrm{m}}}{35\,\cancel{\mathrm{m}}/\mathrm{s}}$$

$$\boxed{t = 20\,\mathrm{s}}$$

Desta forma, o trem atravessa a ponte por completo após $20\,\mathrm{s}$.

2.5 Velocidade relativa

Uma pessoa que caminha pelo corredor de um trem tem uma velocidade em relação ao trem e outra em relação ao solo. Nenhuma delas é mais real: cada valor pertence a um referencial. Chamamos de **velocidade relativa** a velocidade

de um corpo medida em relação a outro corpo ou referencial. Para combinar essas descrições, precisamos identificar em relação a que cada velocidade foi medida.

Chamaremos de A a pessoa, de B o trem e de T o solo. Na mecânica clássica, a velocidade da pessoa em relação ao solo é a soma da velocidade da pessoa em relação ao trem com a velocidade do trem em relação ao solo. Quando todos se movem na mesma direção, podemos trabalhar com valores algébricos, atribuindo os sinais conforme um único sentido positivo:

Por exemplo, se caminhamos no mesmo sentido de uma esteira, os módulos se somam. Se caminhamos contra ela, as duas velocidades têm sinais opostos e seus módulos se subtraem. O sinal do resultado é que informa para onde nos movemos em relação ao chão. Se os módulos forem iguais, ficamos parados em relação ao chão, mesmo caminhando sobre a esteira.

Quando um corpo se move sobre outro que também está em movimento: no **mesmo sentido**, as velocidades se **somam**; em **sentidos opostos**, se **subtraem**.

Exemplo 2.8

Em um aeroporto uma esteira de $L = 100\,\mathrm{m}$ de comprimento se movimenta com velocidade de $v_e = 2\,\mathrm{m/s}$. Quanto tempo uma pessoa que caminha a $v_p = 3\,\mathrm{m/s}$ demora para atravessar a esteira se ela se movimenta no sentido de movimento da esteira? E se ela se movimenta no sentido oposto?

Dados do problema

$$L = 100\,\mathrm{m}, \quad v_e = 2\,\mathrm{m/s}, \quad v_p = 3\,\mathrm{m/s}$$

Neste problema ocorre a situação de **velocidades relativas**. No **mesmo sentido** da esteira, as velocidades se somam:

$$v_T = v_p + v_e = 3\,\mathrm{m/s} + 2\,\mathrm{m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_T = 5\,\mathrm{m/s}}$$

Usando 1.3,

$$t = \frac{L}{v_T} = \frac{100\,\cancel{\mathrm{m}}}{5\,\cancel{\mathrm{m}}/\mathrm{s}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 20\,\mathrm{s}}$$

No **sentido oposto** ao da esteira, as velocidades se subtraem:

$$v_T = v_p - v_e = 3\,\mathrm{m/s} - 2\,\mathrm{m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_T = 1\,\mathrm{m/s}}$$

$$t = \frac{L}{v_T} = \frac{100\,\cancel{\text{m}}}{1\,\cancel{\text{m}}/\text{s}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 100\,\text{s}}$$

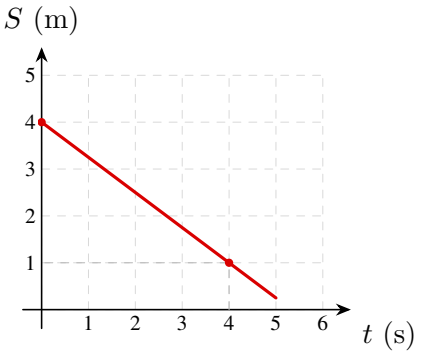
Devemos ter claro que a soma das velocidades é sempre vetorial. Nos exemplos acima, a direção comum permitiu representá-la por uma soma de números com sinais. Quando o barco aponta para a outra margem e a correnteza o leva rio abaixo, precisamos combinar duas direções, usando os vetores estudados no Volume 1. Retomaremos essa situação no Capítulo 5.

Síntese do capítulo

No MU **retilíneo**, a velocidade permanece constante e a aceleração é nula. Escolhendo $t_0 = 0$, usamos $S = S_0 + v \cdot t$ para calcular as posições, nela lendo a posição inicial S_0, que é o número solto, e a velocidade v, que é o fator que multiplica t. No gráfico $S \times t$, a inclinação da reta fornece a velocidade; nos gráficos $v \times t$ e $a \times t$ as linhas são horizontais, e a área sob a de $v \times t$, com sinal, fornece o deslocamento. Para localizar um encontro, igualamos as posições dos corpos no mesmo instante. Nas travessias de corpos extensos, consideramos também seus comprimentos. Ao relacionar referenciais, combinamos velocidades com sinais definidos num mesmo eixo, sempre identificando em relação a que cada uma é medida.

Lista de exercícios 2

1. Qual a principal característica de um movimento uniforme?
2. O que é e para que serve uma equação horária da posição?
3. Monte a equação horária da posição de um veículo que se movimenta com velocidade progressiva de $20\,\mathrm{m/s}$ e parte da posição $-5\,\mathrm{m}$.
4. Dadas as seguintes equações horárias da posição no S.I., determine os dados possíveis e a posição no tempo $5\,\mathrm{s}$.
   a) $S = 8 + 2 \cdot t$
   b) $S = 16 - 7 \cdot t$
   c) $S = -5 + 3 \cdot t$
   d) $S = -12 - 9 \cdot t$
   e) $S = -2 \cdot t$
   f) $S = 14 + t$
   g) $S = t$
5. Sabendo que um veículo se move em movimento uniforme com velocidade de $-6\,\mathrm{m/s}$ parte da posição $30\,\mathrm{m}$. Monte a equação horária da posição deste veículo e determine sua posição nos tempos $1\,\mathrm{s}$, $2\,\mathrm{s}$, $3\,\mathrm{s}$, $5\,\mathrm{s}$ e $50\,\mathrm{s}$.
6. Um carro parte, em movimento uniforme, da posição $S = 12\,\mathrm{m}$ e após $3\,\mathrm{s}$ se encontra na posição $-12\,\mathrm{m}$. Mostre a equação horária da posição deste carro.
7. Monte a equação horária da posição e determine a posição no tempo $12\,\mathrm{s}$ para um veículo que se movimenta conforme o gráfico abaixo.



8. Monte um gráfico de eixos $S(\mathrm{m})$ e $t(\mathrm{s})$ e outro de eixos $v(\mathrm{m/s})$ e $t(\mathrm{s})$, para um móvel que se movimenta conforme a equação horária $S = -2 + 3 \cdot t$ no S.I. até o tempo de $t = 5\,\mathrm{s}$.
9. Sabendo que um corpo se movimenta conforme a equação horária da posição $S = 12 - 5 \cdot t$. Em que tempo o corpo passa pela origem do sistema?

10. Um motorista que parte da posição $S = 60\,\mathrm{km}$ pretende andar em movimento uniforme e com velocidade constante de $30\,\mathrm{m/s}$ para chegar a uma cidade que fica na posição $S = 168\,\mathrm{km}$. Monte a equação horária deste carro e calcule quanto tempo levará até chegar à cidade de destino.
11. Uma pessoa pretende nadar por $120\,\mathrm{m}$ em um rio que possui uma correnteza de velocidade $v_R = 2\,\mathrm{m/s}$. A pessoa nadando a uma velocidade de $v_P = 10\,\mathrm{m/s}$ levará qual tempo para nadar o percurso se estiver a favor da correnteza? E qual tempo levará se estiver contra a correnteza?
12. Um carro **A** parte da posição $S = -40\,\mathrm{m}$ com velocidade constante $v = 108\,\mathrm{km/h}$. Em que posição o carro **A** ultrapassa um carro **B**, que parte simultaneamente da posição $S = 300\,\mathrm{m}$ com velocidade constante $v = 36\,\mathrm{km/h}$?
13. Um veículo **A** que se movimenta com a equação horária $S_A = 5 + 2 \cdot t$ se choca após $20\,\mathrm{s}$ com um veículo **B** que inicia seu movimento, simultaneamente ao primeiro, da posição $S_{0B} = 105\,\mathrm{m}$. Qual a velocidade do veículo **B**?
14. Um veículo **A**, em movimento uniforme, que está $60\,\mathrm{km}$ atrás de um veículo **B** de velocidade constante $20\,\mathrm{m/s}$, precisa andar a qual velocidade constante para ultrapassar e ficar $30\,\mathrm{km}$ à frente do veículo **B** em 90 minutos?
15. Um caminhão de $20\,\mathrm{m}$ de comprimento atravessa por completo um túnel de $90\,\mathrm{m}$ em $5\,\mathrm{s}$. Sabendo que a velocidade máxima permitida no túnel é de $80\,\mathrm{km/h}$, o caminhão será multado? Justifique.
16. Um trem de $1{,}5\,\mathrm{km}$ de comprimento se movendo em MU e velocidade constante de $15\,\mathrm{m/s}$ leva quanto tempo para atravessar uma ponte de $120\,\mathrm{m}$ de comprimento?
17. Dois veículos que partem ao mesmo tempo e da mesma posição pretendem chegar a uma cidade que fica a $300\,\mathrm{km}$ de distância. Sabendo que o veículo **A** chegou 45 minutos antes do veículo **B**, que se moveu com velocidade constante de $80\,\mathrm{km/h}$, determine a velocidade constante do veículo **A**.

3

Movimento Uniformemente Variado

O que você vai aprender

- Identificar um MUV pela variação de velocidade em intervalos de tempo iguais.
- Determinar posição e velocidade a partir das equações horárias do MUV.
- Relacionar velocidades e deslocamento pela equação de Torricelli, sem calcular o tempo.
- Interpretar e construir gráficos do MUV, usando suas inclinações e áreas algébricas.

Por que estudamos isto? Podemos descrever uma arrancada, uma frenagem ou uma queda supondo que a aceleração permaneça constante durante o intervalo observado. Esse modelo, chamado movimento uniformemente variado, nos permite calcular posições e velocidades e compreender os gráficos que usaremos nos próximos capítulos.

Já tendo conhecido o movimento uniforme, podemos nos aproximar um pouco mais da realidade da maioria dos movimentos. Introduzindo a grandeza física **aceleração de modo constante**, temos um **movimento uniformemente variado** (MUV).

Ao não levar em conta aceleração em um movimento, e com isso estudarmos o movimento uniforme, temos um caso bastante simplificado mas que dificilmente é encontrado na natureza. Basicamente a maioria dos movimentos naturais são bastante complexos e encontrar um movimento realista puramente uniforme é um grande desafio. Mas como já explicado anteriormente, para o estudo da física primeiro analisamos os casos mais simplificados e idealizados, mesmo que esses não sejam os mais comuns e realistas. Introduzindo agora em nossos estudos uma **aceleração constante**, nos aproximamos um passo da realidade. Mas ainda assim são movimentos idealizados que desprezam muitas condições físicas.

Ao assimilar que agora teremos aceleração em nosso movimento, percebemos que a **velocidade não será mais constante**, e sim, sofrerá alteração em seu valor. Essa alteração ocorrerá de modo linear, ou seja, será uma mudança ao longo do tempo de modo uniforme. Se ao estudar o **movimento uniforme** tínhamos como característica a mudança de **posição de modo uniforme**, nesse momento, ao estudar o **movimento uniformemente variado**, teremos a mudança da velocidade de modo uniforme. Isso acarretará que a mudança de posição não será mais linear e uniforme e sim de um modo um pouco mais complexo, que assimilaremos melhor ao observar os gráficos que descreverão esse movimento.

A característica básica do movimento uniformemente variado é a presença de uma **aceleração constante** que acarreta uma **variação uniforme da velocidade**.

3.1 Equações horárias do movimento uniformemente variado

Como teremos tanto posição quanto velocidade variando ao longo do tempo, teremos também equação horária para cada uma dessas duas grandezas. Lembrando da equação para a aceleração escalar média 1.4 e considerando o tempo inicial como sendo o tempo zero $\Delta t = t_f - t_0 = t_f - 0 = t_f = t$. A velocidade final (v_f) será sempre a velocidade encontrada no tempo (t) considerado. Sendo a aceleração uma constante $a_m = a$, temos

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{\Delta v}{\Delta t} \\ a &= \frac{v - v_0}{t} \\ a \cdot t &= v - v_0 \\ v_0 + a \cdot t &= v \end{aligned}$$

ou seja, a **equação horária da velocidade** para o **movimento uniformemente variado** é

EQUAÇÃO HORÁRIA DA VELOCIDADE (MUV)

$$v = v_0 + a \cdot t \tag{3.1}$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

- $v \rightarrow$ velocidade no instante t
- $v_0 \rightarrow$ velocidade inicial
- $a \rightarrow$ aceleração (constante)
- $t \rightarrow$ tempo decorrido

onde a velocidade (v) em um certo tempo (t) é dada em decorrência da velocidade inicial (v_0) do movimento, da aceleração (a) e do tempo (t) decorrido do movimento. É possível perceber uma grande similaridade da equação horária da velocidade do movimento uniformemente variado 3.1 com a equação horária da posição no movimento uniforme 2.1. Essa similaridade não ocorre na equação horária da posição do movimento uniformemente variado. Neste tipo de movimento a posição não irá alterar seu valor ao longo do tempo de modo linear e sim em termos de uma função quadrática.

A **equação horária da posição** para o **movimento uniformemente variado** é dada por:

EQUAÇÃO HORÁRIA DA POSIÇÃO (MUV)

$$S = S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \tag{3.2}$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$S \rightarrow$ posição no instante t
$S_0 \rightarrow$ posição inicial
$v_0 \rightarrow$ velocidade inicial
$a \rightarrow$ aceleração (constante)
$t \rightarrow$ tempo decorrido

ou seja, a posição (S) em um certo tempo (t) depende da posição inicial (S_0), da velocidade inicial (v_0), da aceleração (a) e do tempo (t) de forma quadrática.

Perceba que se não for levada em conta uma aceleração nas equações 3.1 e 3.2, ou seja, se consideramos um movimento uniforme $a = 0$, essas equações ficam

$$\begin{aligned} v &= v_0 + a \cdot t \\ v &= v_0 + 0 \cdot t \\ v &= v_0 + 0 \\ v &= v_0 \end{aligned}$$

ou seja, a velocidade não muda. E temos que

$$\begin{aligned} S &= S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ S &= S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot t^2 \\ S &= S_0 + v_0 \cdot t + 0 \\ S &= S_0 + \underbrace{v_0}_{=v} \cdot t \\ S &= S_0 + v \cdot t \end{aligned}$$

que é a mesma equação 2.1. Sempre que estudamos um movimento mais complexo (MUV), o movimento mais simples (MU) deve ser contemplado nestes cálculos.

Exemplo 3.1

Dado um movimento que parte da posição $5\,\mathrm{m}$ com velocidade inicial $v_0 = 3\,\mathrm{m/s}$ e aceleração constante $a = 4\,\mathrm{m/s^2}$. Qual a posição e a velocidade do corpo nos tempos $3\,\mathrm{s}$, $15\,\mathrm{s}$ e $95\,\mathrm{s}$ após o início do movimento?

Dados do problema

$$
\begin{aligned}
S_0 &= 5\,\mathrm{m}\\
v_0 &= 3\,\mathrm{m/s}\\
a &= 4\,\mathrm{m/s^2}\\
t_1 &= 3\,\mathrm{s}\\
t_2 &= 15\,\mathrm{s}\\
t_3 &= 95\,\mathrm{s}\\
v &= ?\\
S &= ?
\end{aligned}
$$

O propósito das equações horárias da velocidade e da posição é justamente determinar o valor dessas grandezas, em diferentes tempos, para um mesmo movimento com características iniciais bem determinadas. Portanto, usando 3.1 e 3.2, temos

$$
\begin{aligned}
v &= v_0 + a\cdot t\\
v &= 3\,\mathrm{m/s} + 4\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}^2}}\cdot 3\cancel{\mathrm{s}}\\
v &= 3\,\mathrm{m/s} + 12\,\mathrm{m/s}\\
v &= 15\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S &= S_0 + v_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2\\
S &= 5\,\mathrm{m} + 3\,\mathrm{m/s}\cdot 3\,\mathrm{s} + 0{,}5\cdot 4\,\mathrm{m/s^2}\cdot (3\,\mathrm{s})^2\\
S &= 5\,\mathrm{m} + 3\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}}\cdot 3\cancel{\mathrm{s}} + 0{,}5\cdot 4\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}^2}}\cdot 9\cancel{\mathrm{s}^2}\\
S &= 5\,\mathrm{m} + 9\,\mathrm{m} + 18\,\mathrm{m}\\
S &= 32\,\mathrm{m}
\end{aligned}
$$

Logo, partindo da posição $5\,\mathrm{m}$ com velocidade inicial de $3\,\mathrm{m/s}$, após $3\,\mathrm{s}$ o móvel estará com velocidade

$$\boxed{v = 15\,\mathrm{m/s}}$$

e na posição

$$\boxed{S = 32\,\mathrm{m}}$$

Para o tempo de $15\,\mathrm{s}$ temos

$$\begin{aligned} v &= v_0 + a \cdot t \\ v &= 3\,\mathrm{m/s} + 4\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}^2}} \cdot 15\cancel{\mathrm{s}} \\ v &= 3\,\mathrm{m/s} + 60\,\mathrm{m/s} \\ v &= 63\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ S &= 5\,\mathrm{m} + 3\,\mathrm{m/s} \cdot 15\,\mathrm{s} + 0{,}5 \cdot 4\,\mathrm{m/s^2} \cdot (15\,\mathrm{s})^2 \\ S &= 5\,\mathrm{m} + 3\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 15\cancel{\mathrm{s}} + 0{,}5 \cdot 4\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}^2}} \cdot 225\cancel{\mathrm{s}^2} \\ S &= 5\,\mathrm{m} + 45\,\mathrm{m} + 450\,\mathrm{m} \\ S &= 500\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Logo, partindo da posição $5\,\mathrm{m}$ com velocidade inicial de $3\,\mathrm{m/s}$, após $15\,\mathrm{s}$ o móvel estará com velocidade

$$\boxed{v = 63\,\mathrm{m/s}}$$

e na posição

$$\boxed{S = 500\,\mathrm{m}}$$

Para o tempo de $95\,\mathrm{s}$ temos

$$\begin{aligned} v &= v_0 + a \cdot t \\ v &= 3\,\mathrm{m/s} + 4\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}^2}} \cdot 95\cancel{\mathrm{s}} \\ v &= 3\,\mathrm{m/s} + 380\,\mathrm{m/s} \\ v &= 383\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ S &= 5\,\mathrm{m} + 3\,\mathrm{m/s} \cdot 95\,\mathrm{s} + 0{,}5 \cdot 4\,\mathrm{m/s^2} \cdot (95\,\mathrm{s})^2 \\ S &= 5\,\mathrm{m} + 3\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 95\cancel{\mathrm{s}} + 0{,}5 \cdot 4\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}^2}} \cdot 9025\cancel{\mathrm{s}^2} \\ S &= 5\,\mathrm{m} + 285\,\mathrm{m} + 18.050\,\mathrm{m} \\ S &= 18.340\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Logo, partindo da posição $5\,\mathrm{m}$ com velocidade inicial de $3\,\mathrm{m/s}$, após $95\,\mathrm{s}$ o móvel estará com velocidade

$$\boxed{v = 383\,\mathrm{m/s}}$$

e na posição

$$\boxed{S = 18.340\,\mathrm{m}}$$

Exemplo 3.2

Dadas as seguintes equações horárias da posição no S.I., determine os dados possíveis.

a) $S = 3 + 5 \cdot t + 4 \cdot t^2$
b) $S = 4 - 2 \cdot t + t^2$
c) $S = 7 \cdot t - t^2$
d) $S = 5 - 0{,}5 \cdot t^2$
e) $S = -t^2$
f) $S = t$

Para a equação horária da posição **a** temos

$$S = S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$
$$S = \underbrace{\boxed{3}}_{=S_0} + \underbrace{\boxed{5}}_{=v_0} \cdot t + \underbrace{\boxed{4}}_{=\frac{1}{2}\cdot a} \cdot t^2$$

logo

$$\begin{aligned} S_0 &= 3\,\mathrm{m} \\ v_0 &= 5\,\mathrm{m/s} \\ \frac{1}{2} \cdot a &= 4 \\ a &= 4 \cdot 2 \\ a &= 8\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

Para a equação horária da posição **b** temos

$$S = S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$
$$S = \underbrace{\boxed{4}}_{=S_0} + \underbrace{\boxed{-2}}_{=v_0} \cdot t + \underbrace{\boxed{1}}_{=\frac{1}{2}\cdot a} \cdot t^2$$

logo

$$\begin{aligned} S_0 &= 4\,\mathrm{m} \\ v_0 &= -2\,\mathrm{m/s} \\ \frac{1}{2} \cdot a &= 1 \\ a &= 1 \cdot 2 \\ a &= 2\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

Para a equação horária da posição **c** temos

$$S = S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$
$$S = \underbrace{\boxed{0}}_{=S_0} + \underbrace{\boxed{7}}_{=v_0} \cdot t + \underbrace{\boxed{-1}}_{=\frac{1}{2}\cdot a} \cdot t^2$$

logo

$$\begin{aligned} S_0 &= 0\,\mathrm{m} \\ v_0 &= 7\,\mathrm{m/s} \\ \frac{1}{2} \cdot a &= -1 \\ a &= -1 \cdot 2 \\ a &= -2\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

Para a equação horária da posição **d** temos

$$S = S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$S = \underbrace{\boxed{5}}_{=S_0} + \underbrace{\boxed{0}}_{=v_0} \cdot t + \underbrace{\boxed{-0{,}5}}_{=\frac{1}{2}\cdot a} \cdot t^2$$

logo

$$\begin{aligned} S_0 &= 5\,\text{m} \\ v_0 &= 0\,\text{m/s} \\ \frac{1}{2} \cdot a &= -0{,}5 \\ a &= -0{,}5 \cdot 2 \\ a &= -1\,\text{m/s}^2 \end{aligned}$$

Para a equação horária da posição **e** temos

$$\begin{aligned} S &= S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ S &= \underbrace{\boxed{0}}_{=S_0} + \underbrace{\boxed{0}}_{=v_0} \cdot t + \underbrace{\boxed{-1}}_{=\frac{1}{2}\cdot a} \cdot t^2 \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} S_0 &= 0\,\text{m} \\ v_0 &= 0\,\text{m/s} \\ \frac{1}{2} \cdot a &= -1 \\ a &= -1 \cdot 2 \\ a &= -2\,\text{m/s}^2 \end{aligned}$$

A equação não apresenta valor para S_0, logo esse é 0. A equação não apresenta valor para v_0 associado a (t), logo a velocidade inicial é 0.
Para a equação **f** temos

$$\begin{aligned} S &= S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ S &= \underbrace{\boxed{0}}_{=S_0} + \underbrace{\boxed{1}}_{=v_0} \cdot t + \underbrace{\boxed{0}}_{=\frac{1}{2}\cdot a} \cdot t^2 \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} S_0 &= 0\,\mathrm{m} \\ v_0 &= 1\,\mathrm{m/s} \\ \frac{1}{2}\cdot a &= 0 \\ a &= 0\cdot 2 \\ a &= 0\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

Por não apresentar uma aceleração (a) associada a um termo (t^2), logo não se trata de um movimento uniformemente variado. Por conter uma velocidade inicial $v_0 = 1\,\mathrm{m/s}$, que não mudará por não haver aceleração, esta equação horária é de um **movimento uniforme**.

Exemplo 3.3

Monte a equação horária da posição e da velocidade para um corpo que parte de $S = 5\,\mathrm{m}$ com velocidade inicial $v_0 = 4\,\mathrm{m/s}$ e após $2\,\mathrm{s}$ está na posição $S = 19\,\mathrm{m}$.

Dados do problema

$$\begin{aligned} S_0 &= 5\,\mathrm{m} \\ v_0 &= 4\,\mathrm{m/s} \\ S(2\,\mathrm{s}) &= 19\,\mathrm{m} \\ t &= 2\,\mathrm{s} \\ a &= ? \end{aligned}$$

Para determinar a equação horária precisamos conhecer a posição de partida (S_0), a velocidade inicial $(v_0 = 4\,\mathrm{m/s})$ e a aceleração $a = ?$. Assim, primeiro definimos o valor da aceleração usando 3.2 com os valores conhecidos no tempo $t = 2\,\mathrm{s}$.

$$S = S_0 + v_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$$

$$19\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{m} + 4\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 2\cancel{\mathrm{s}} + \frac{a \cdot (2\,\mathrm{s})^2}{2}$$

$$19\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{m} + 8\,\mathrm{m} + \frac{a \cdot 4\,\mathrm{s}^2}{2}$$

$$19\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m} - 8\,\mathrm{m} = a \cdot 2\,\mathrm{s}^2$$

$$6\,\mathrm{m} = a \cdot 2\,\mathrm{s}^2$$

$$\frac{6\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{s}^2} = a$$

logo

$$\boxed{a = 3\mathrm{m/s}^2}$$

Sabendo o valor da aceleração, a equação horária da posição para este movimento, no S.I., é

$$S = S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$\boxed{S = 5 + 4 \cdot t + 1{,}5 \cdot t^2}$$

e a equação horária da velocidade é

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$\boxed{v = 4 + 3 \cdot t}$$

Exemplo 3.4

Um veículo parte da origem do sistema de coordenadas com velocidade $v = 4\,\mathrm{m/s}$. Em quanto tempo esse veículo passa pela posição $S = 45\,\mathrm{m}$ sabendo que o mesmo é acelerado a $2\,\mathrm{m/s^2}$? Com qual velocidade passará nesta posição $S = 45\,\mathrm{m}$?

Dados do problema

$$S_0 = 0\,\mathrm{m}$$
$$v_0 = 4\,\mathrm{m/s}$$
$$S(t = ?) = 45\,\mathrm{m}$$

$$a = 2\,\mathrm{m/s^2}$$
$$t = ?$$

Este exemplo serve para perceber que será necessário muitas vezes usar a fórmula de Bhaskara por estarmos tratando de uma equação horária para a posição do tipo função de segundo grau. Assim, temos que o tempo na posição $S = 45\,\mathrm{m}$ será dado por

$$S = S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$
$$45\,\mathrm{m} = 0\,\mathrm{m} + 4\,\mathrm{m/s} \cdot t + \frac{2\,\mathrm{m/s^2}}{2} \cdot t^2$$
$$0 = 1\,\mathrm{m/s^2} \cdot t^2 + 4\,\mathrm{m/s} \cdot t - 45\,\mathrm{m}$$

podemos perceber que essa equação $1\,\mathrm{m/s^2} \cdot t^2 + 4\,\mathrm{m/s} \cdot t - 45\,\mathrm{m} = 0$ é similar à equação $A \cdot x^2 + B \cdot x + C = 0$. Assim, teremos

$$\underbrace{\boxed{1\,\mathrm{m/s^2}}}_{A} \cdot \underbrace{\boxed{t^2}}_{x^2} + \underbrace{\boxed{4\,\mathrm{m/s}}}_{B} \cdot \underbrace{\boxed{t}}_{x} + \underbrace{\boxed{-45\,\mathrm{m}}}_{C} = 0$$

onde, sendo $x = t$, temos

$$\boxed{A = 1\,\mathrm{m/s^2}}$$

$$\boxed{B = 4\,\mathrm{m/s}}$$

e

$$\boxed{C = -45\,\mathrm{m}}$$

Sabendo que a solução da equação de segundo grau é dada pela relação vista em (Vol. 1) x'e $x'' = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A}$, temos

$$t'\text{e } t'' = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4 \cdot A \cdot C}}{2 \cdot A}$$
$$t'\text{e } t'' = \frac{-4\,\mathrm{m/s} \pm \sqrt{(4\,\mathrm{m/s})^2 - 4 \cdot (1\,\mathrm{m/s^2}) \cdot (-45\,\mathrm{m})}}{2 \cdot (1\,\mathrm{m/s^2})}$$
$$t'\text{e } t'' = \frac{-4\,\mathrm{m/s} \pm \sqrt{16\,\mathrm{m^2/s^2} + 180\,\mathrm{m^2/s^2}}}{2\,\mathrm{m/s^2}}$$

$$t' \text{e } t'' = \frac{-4\,\mathrm{m/s} \pm \sqrt{196\,\mathrm{m^2/s^2}}}{2\,\mathrm{m/s^2}}$$
$$t' \text{e } t'' = \frac{-4\,\mathrm{m/s} \pm 14\,\mathrm{m/s}}{2\,\mathrm{m/s^2}}$$

Assim

$$t' = \frac{-4\,\mathrm{m/s} + 14\,\mathrm{m/s}}{2\,\mathrm{m/s^2}}$$
$$t' = \frac{10\cancel{\mathrm{m}}/\cancel{\mathrm{s}}}{2\cancel{\mathrm{m}}/\mathrm{s}^{\cancel{2}}}$$
$$t' = \frac{5}{\frac{1}{\mathrm{s}}}$$
$$t' = 5\,\mathrm{s}$$

e

$$t'' = \frac{-4\,\mathrm{m/s} - 14\,\mathrm{m/s}}{2\,\mathrm{m/s^2}}$$
$$t'' = \frac{-18\cancel{\mathrm{m}}/\cancel{\mathrm{s}}}{2\cancel{\mathrm{m}}/\mathrm{s}^{\cancel{2}}}$$
$$t'' = \frac{-9}{\frac{1}{\mathrm{s}}}$$
$$t'' = -9\,\mathrm{s}$$

Temos duas respostas para o tempo (t). Mas como o sinal negativo associado ao tempo significa um tempo passado $t = -9\,\mathrm{s}$, a resposta que buscamos é $t = 5\,\mathrm{s}$. Logo, demorará **5 segundos** para o móvel passar na posição $S = 45\,\mathrm{m}$. Para calcular a velocidade simplesmente aplicamos este tempo na equação 3.1. Assim

$$v = v_0 + a \cdot t$$
$$v = 4\,\mathrm{m/s} + 2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^{\cancel{2}}} \cdot 5\cancel{\mathrm{s}}$$
$$v = 4\,\mathrm{m/s} + 10\,\mathrm{m/s}$$

$$\boxed{v = 14\,\mathrm{m/s}}$$

3.2 Gráficos no movimento uniformemente variado

Ao analisar os gráficos para o movimento uniformemente variado teremos muitas informações extras em relação aos gráficos do MU. Tomemos os seguintes gráficos de **posição** ao longo do **tempo** $(S \times t)$ para o **MUV**, dadas algumas condições iniciais.

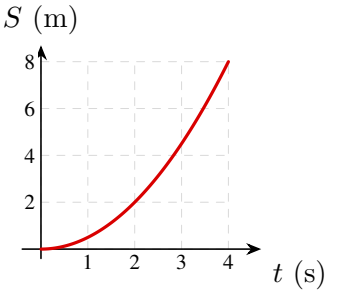


Figura 3.1: Gráfico de **posição** (S) ao longo do **tempo** (t). Com **posição inicial** $S_0 = 0\,\mathrm{m}$, **velocidade inicial** $v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$ e **aceleração** constante **POSITIVA** $a = 1\,\mathrm{m/s^2}$, ou seja, com a equação horária da posição sendo $S = 0{,}5 \cdot t^2$.

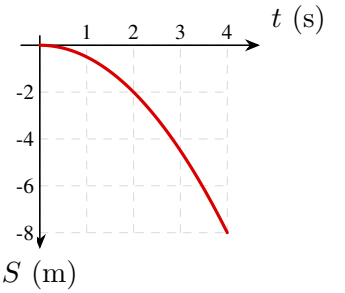


Figura 3.2: Gráfico de **posição** (S) ao longo do **tempo** (t). Com **posição inicial** $S_0 = 0\,\mathrm{m}$, **velocidade inicial** $v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$ e **aceleração** constante **NEGATIVA** $a = -1\,\mathrm{m/s^2}$, ou seja, com a equação horária da posição sendo $S = -0{,}5 \cdot t^2$.

Perceba que a única diferença entre os valores aplicados aos gráficos 3.1 e 3.2 é somente o **sinal da aceleração**. Fica evidente que ao mudar o sinal da aceleração muda-se também o sentido da concavidade.

- Aceleração Positiva $a > 0$ - Concavidade para cima.
- Aceleração Negativa $a < 0$ - Concavidade para baixo.

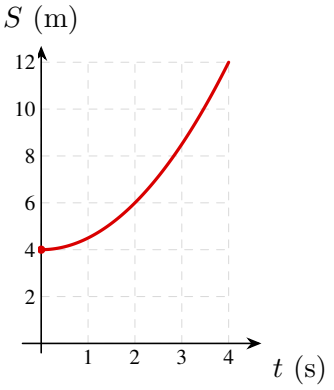


Figura 3.3: Gráfico de **posição** (S) ao longo do **tempo** (t). Com **posição inicial** $S_0 = 4\,\mathrm{m}$, **velocidade inicial** $v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$ e **aceleração** constante **POSITIVA** $a = 1\,\mathrm{m/s^2}$, ou seja, com a equação horária da posição sendo $S = 4 + 0{,}5 \cdot t^2$.

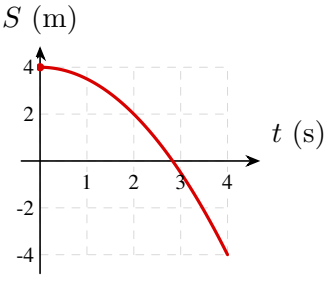


Figura 3.4: Gráfico de **posição** (S) ao longo do **tempo** (t). Com **posição inicial** $S_0 = 4\,\mathrm{m}$, **velocidade inicial** $v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$ e **aceleração** constante **NEGATIVA** $a = -1\,\mathrm{m/s^2}$, ou seja, com a equação horária da posição sendo $S = 4 - 0{,}5 \cdot t^2$.

Ao mudar o valor da posição inicial $S_0 = 4\,\mathrm{m}$ somente movemos verticalmente o gráfico para partir da nova posição inicial. Os gráficos 3.3 e 3.4 seguem o mesmo padrão de mudanças ao alterar a aceleração como os gráficos 3.1 e 3.2, agora simplesmente com a mudança da posição inicial destes.

Agora analisemos dois movimentos em um só gráfico 3.5. O movimento caracterizado em vermelho que parte da **posição inicial** $S_0 = 4\,\mathrm{m}$, com **velocidade inicial POSITIVA** $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$ e **aceleração NEGATIVA** $a = -1\,\mathrm{m/s^2}$, ou seja, caracterizado pela equação horária da posição $S = 4 + 5 \cdot t - 0{,}5 \cdot t^2$. E o movimento caracterizado em azul que parte da **posição inicial** $S_0 = 10\,\mathrm{m}$, com **velocidade inicial NEGATIVA** $v_0 = -5\,\mathrm{m/s}$ e **aceleração POSITIVA** $a = 1\,\mathrm{m/s^2}$, ou seja, caracterizado pela equação horária da posição $S = 10 - 5 \cdot t + 0{,}5 \cdot t^2$.

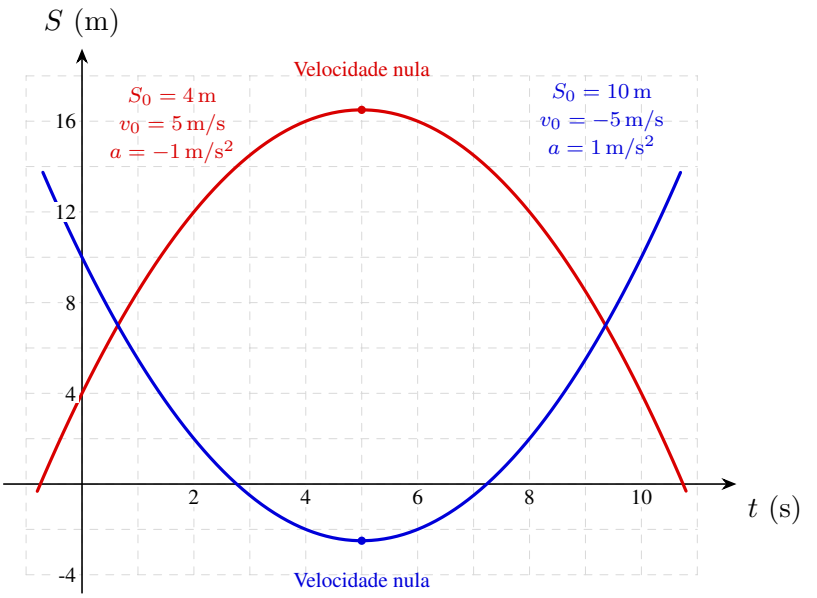


Figura 3.5: Gráfico de **posição** (S) ao longo do **tempo** (t). Em vermelho movimento com **posição inicial** $S_0 = 4\,\mathrm{m}$, **velocidade inicial POSITIVA** $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$ e **aceleração** constante **NEGATIVA** $a = -1\,\mathrm{m/s^2}$, ou seja, com a equação horária da posição sendo $S = 4 + 5 \cdot t - 0{,}5 \cdot t^2$. Em azul movimento com **posição inicial** $S_0 = 10\,\mathrm{m}$, **velocidade inicial NEGATIVA** $v_0 = -5\,\mathrm{m/s}$ e **aceleração** constante **POSITIVA** $a = 1\,\mathrm{m/s^2}$, ou seja, com a equação horária da posição sendo $S = 10 - 5 \cdot t + 0{,}5 \cdot t^2$.

Todo valor de tempo negativo $t < 0$ significa algo antes do que consideramos início, ou seja, é do passado. Como não levaremos em conta um movimento passado, analisamos a partir de $t = 0\,\mathrm{s}$. Neste tempo o móvel descrito pela linha vermelha parte da **posição inicial** $S_0 = 4\,\mathrm{m}$ em **movimento progressivo** $v_0 = 5\,\mathrm{m/s}$ e **retardado** ($v > 0$ e $a < 0$). O móvel diminui sua velocidade até chegar à velocidade nula $v = 0\,\mathrm{m/s}$ no tempo exato de $t = 5\,\mathrm{s}$ e na posição $S = 16{,}5\,\mathrm{m}$.

> É importante notar que o **vértice** da concavidade (azul ou vermelha) é sempre o ponto em que a **velocidade** fica **nula** e **inverte** seu **sentido**.

A partir de $t = 5\,\mathrm{s}$ o móvel vermelho passa a ter velocidade negativa $v < 0$ o que caracteriza que a partir deste tempo o móvel passa a ter um **movimento regressivo**. Como a partir de 5 segundos a velocidade e aceleração terão o mesmo sentido, visto que a velocidade mudou seu sentido ($v < 0$ e $a < 0$), o móvel deixa de ter um movimento retardado e passa a ser **acelerado**, cruzando a origem $S = 0\,\mathrm{m}$ no tempo $t = 10{,}74\,\mathrm{s}$. Perceba que um mesmo móvel tendo uma mesma equação horária, pode mudar seu tipo de movimento ao longo do tempo.

A análise do móvel descrito pela linha azul é semelhante. O móvel parte da posição $S_0 = 10\,\mathrm{m}$ em movimento **regressivo** $v_0 = -5\,\mathrm{m/s}$ e **retardado** ($v < 0$ e $a > 0$). No tempo de $t = 5\,\mathrm{s}$ o móvel atinge velocidade nula e a partir de 5 segundos o móvel inverte seu sentido de velocidade $v > 0$ passando a ter

um movimento **progressivo** e **acelerado** ($v > 0$ e $a > 0$). O móvel em azul cruza a origem $S = 0\,\mathrm{m}$ duas vezes. Primeiro enquanto ainda era um movimento regressivo no tempo de $t = 2{,}76\,\mathrm{s}$ e após inverter seu sentido de velocidade e passando a ter um movimento progressivo no tempo $t = 7{,}24\,\mathrm{s}$.

Agora vamos analisar os gráficos de **velocidade** ao longo do **tempo** ($v \times t$). Perceba a semelhança entre os gráficos 3.6 e 3.7 e o gráfico do MU 2.1. Aqui a aceleração vai influenciar no sentido da linha da velocidade para cima ($a > 0$) ou para baixo ($a < 0$) da mesma forma que nos gráficos para MU a velocidade influenciava no sentido da linha de posição. Logo, somente observando o gráfico de $v \times t$ podemos saber o sinal da aceleração no movimento uniformemente variado. Observemos também que no gráfico 3.7, no tempo $t = 2\,\mathrm{s}$, vemos o momento em que a velocidade deixa de ser positiva ($v > 0$), **movimento progressivo**, e inverte seu sentido passando a ser negativa ($v < 0$), **movimento regressivo**. Neste mesmo gráfico 3.7 vemos que entre os tempos $t = 0\,\mathrm{s}$ e $t = 2\,\mathrm{s}$ é um **movimento retardado** ($v > 0$ e $a < 0$) e a partir do tempo $t = 2\,\mathrm{s}$ passa a ser **acelerado** ($v < 0$ e $a < 0$).

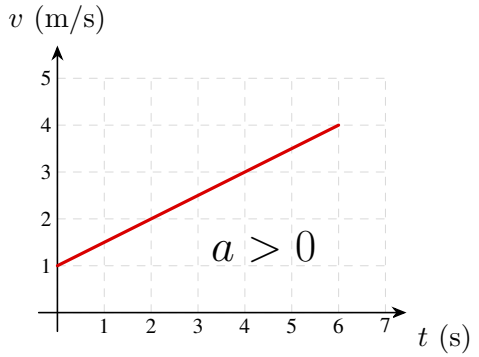


Figura 3.6: **Velocidade** (v) ao longo do **tempo** (t) para aceleração **positiva** $a > 0$.

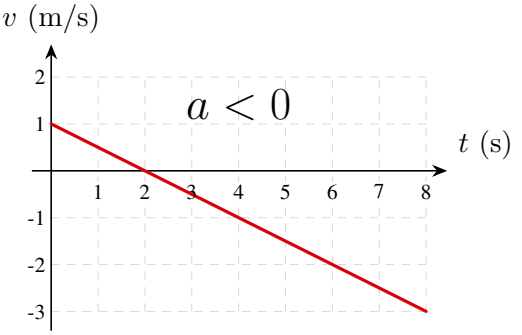


Figura 3.7: **Velocidade** (v) ao longo do **tempo** (t) para aceleração **negativa** $a < 0$.

Para o gráfico de **aceleração** ao longo do **tempo** ($a \times t$) temos a aceleração (a) sendo descrita de forma constante.

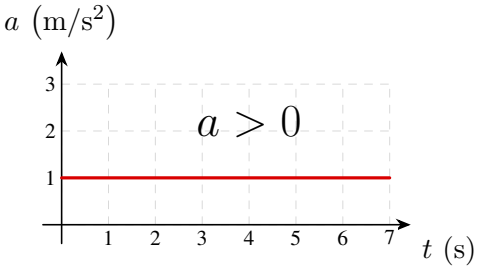


Figura 3.8: **Aceleração** (a) ao longo do **tempo** (t) para aceleração **positiva** $a > 0$.

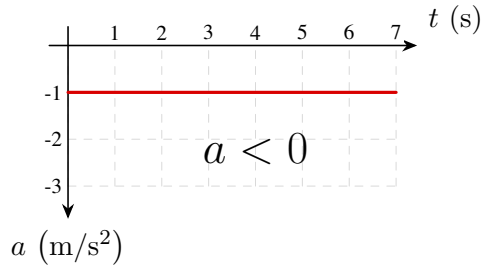


Figura 3.9: **Aceleração** (a) ao longo do **tempo** (t) para aceleração **negativa** $a < 0$.

Novamente observamos que os gráficos trazem muitas informações de forma

explícita e também algumas de forma implícita. Saber usar os gráficos é essencial para conhecer e descrever o movimento uniformemente variado.

Observando as tabelas 3.1 e 3.2 podemos observar mais alguns detalhes a respeito das diferenças e semelhanças entre o MU e MUV.

$S = S_0 + v \cdot t$						
$t\,(\mathrm{s})$	0	1	2	3	4	5
$a\,(\mathrm{m/s^2})$	0	0	0	0	0	0
$v\,(\mathrm{m/s})$	2	2	2	2	2	2
$S\,(\mathrm{m})$	0	2	4	6	8	10

Tabela 3.1: Tabela de posição, velocidade e aceleração nos 5 primeiros segundos para um móvel que está em **movimento uniforme** com equação horária $S = 2 \cdot t$.

$S = S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$						
$t\,(\mathrm{s})$	0	1	2	3	4	5
$a\,(\mathrm{m/s^2})$	2	2	2	2	2	2
$v\,(\mathrm{m/s})$	0	2	4	6	8	10
$S\,(\mathrm{m})$	0	1	4	9	16	25

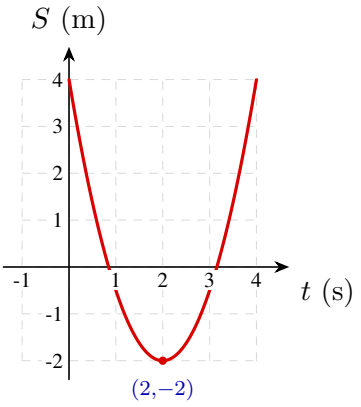
Tabela 3.2: Tabela de posição, velocidade e aceleração nos 5 primeiros segundos para um móvel que está em **movimento uniformemente variado** com equação horária $S = 0{,}5 \cdot a \cdot t^2$.

Vemos na tabela 3.1 que a **aceleração** é sempre **nula** e a **velocidade** é sempre **constante**. Isso faz com que a **posição varie sempre de modo linear** (neste exemplo, de 2 em 2 metros) no **movimento uniforme**.

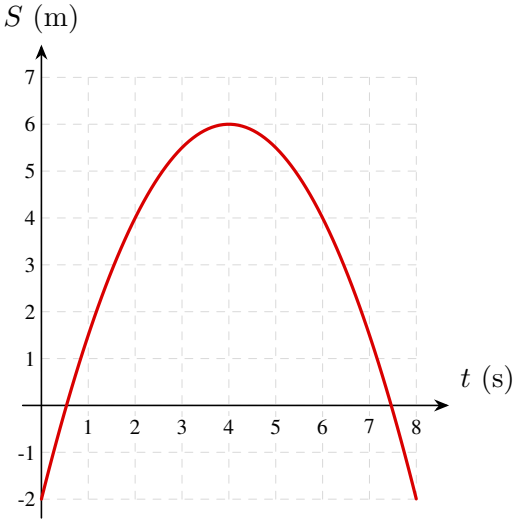
Já na tabela 3.2 a mesma relação entre velocidade e posição **vista para o MU** ocorre **somente** entre **aceleração** e **velocidade** no **MUV**. Ou seja, por a aceleração ser constante a **velocidade varia de modo linear** (neste exemplo de 2 em 2 metros por segundo). Ao passo que a **posição não tem linearidade** em sua variação. Ou seja, a posição varia em saltos não iguais.

Exemplo 3.5

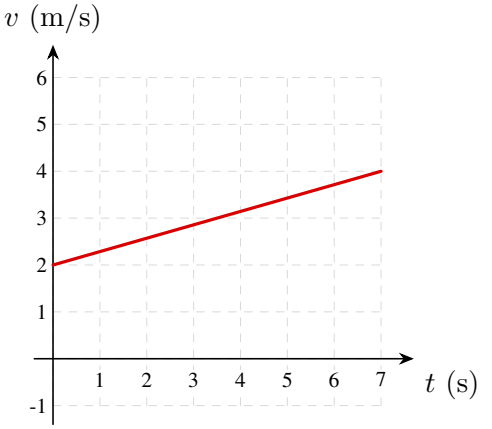
Extraia todos os dados possíveis dos gráficos abaixo:
a)



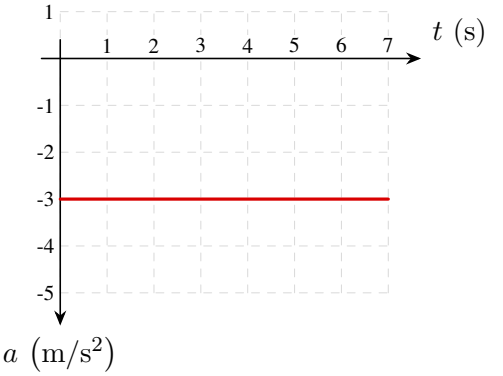
b)



c)



d)



No gráfico **a** temos que o mesmo caracteriza um **movimento uniformemente variado** (linha vermelha em forma de parábola nos eixos (S) e (t)). É um movimento que inicialmente é **regressivo** $(v_0 < 0)$ (inclinação da linha vermelha para baixo). A posição inicial é $S_0 = 4\,\mathrm{m}$. No tempo $(t = 2\,\mathrm{s})$ o corpo está na posição $(S = -2\,\mathrm{m})$ e sua **velocidade é nula** $[v\,(2\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m/s}]$ pois esse é o **vértice da concavidade**. Para montar as equações horárias desse móvel nos falta conhecer a **aceleração** $(a = ?)$, que por ter **concavidade para cima é positiva** e a **velocidade inicial** $(v_0 = ?)$ que já sabemos ser **negativa**. Para isso, usaremos os dados conhecidos no tempo $(t = 2\,\mathrm{s})$. Assim, temos as seguintes equações ao considerarmos $v_0 = -X$ (sinal negativo por ser regressivo) e $a = Y$ (sinal positivo por ser uma concavidade para cima) no tempo $(t = 2\,\mathrm{s})$:

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$\underbrace{v}_{0} = \underbrace{v_0}_{-X} + \underbrace{a}_{Y} \cdot \underbrace{t}_{2}$$
$$0 = -X + Y \cdot 2$$
$$X = 2Y$$

e, sabendo que em $(2\,\mathrm{s})$ o móvel está na posição $S\,(2\,\mathrm{s}) = -2\,\mathrm{m}$, temos

$$S = S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$
$$\underbrace{S}_{-2} = \underbrace{S_0}_{4} + \underbrace{v_0}_{-X} \cdot \underbrace{t}_{2} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{a}_{Y} \cdot \underbrace{t}_{2}^{\,2}$$
$$-2 = 4 - X \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot Y \cdot 2^2$$
$$-2 = 4 - 2X + 2Y$$
$$-2 - 4 + 2X = 2Y$$
$$-6 + 2X = 2Y$$

usando da primeira relação que $X = 2Y$, logo $2X = 4Y$, inserindo esse resultado na segunda relação temos

$$-6 + \underbrace{2X}_{4Y} = 2Y$$
$$-6 + 4Y = 2Y$$
$$4Y - 2Y = 6$$
$$2Y = 6$$
$$Y = \frac{6}{2}$$

$$\boxed{Y = 3}$$

se $Y = 3$, retornando para a primeira relação $X = 2Y$, temos que $X = 2 \cdot 3$. Logo

$$\boxed{X = 6}$$

Assim, temos que

$$\boxed{v_0 = -X = -6\,\mathrm{m/s}}$$

e

$$\boxed{a = Y = 3\,\mathrm{m/s^2}}$$

Com isso podemos construir as duas equações horárias para esse móvel

$$\boxed{S = 4 - 6 \cdot t + 1{,}5 \cdot t^2}$$

$$\boxed{v = -6 + 3 \cdot t}$$

No gráfico **b** temos que o mesmo caracteriza um **movimento uniformemente variado** (linha vermelha em forma de parábola nos eixos (S) e (t)). É um movimento que inicialmente é **progressivo** $(v_0 > 0)$ (inclinação da linha vermelha para cima). A posição inicial é $S_0 = -2\,\mathrm{m}$. No tempo $(t = 4\,\mathrm{s})$ o corpo está na posição $(S = 6\,\mathrm{m})$ e sua **velocidade é nula** $[v\,(4\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m/s}]$ pois esse é o **vértice da concavidade**. Para montar as equações horárias desse móvel nos falta conhecer a **aceleração** $(a = ?)$, que por ter **concavidade para baixo é negativa** e a **velocidade inicial** $(v_0 = ?)$ que já sabemos ser **positiva**. Para isso, usaremos os dados conhecidos no tempo $(t = 4\,\mathrm{s})$. Assim, temos as seguintes equações ao considerarmos $v_0 = X$ (sinal positivo por ser progressivo) e $a = -Y$ (sinal negativo por ser uma concavidade para baixo) no tempo $(t = 4\,\mathrm{s})$:

$$\begin{aligned}
v &= v_0 + a \cdot t \\
\underbrace{v}_{0} &= \underbrace{v_0}_{X} + \underbrace{a}_{-Y} \cdot \underbrace{t}_{4} \\
0 &= X - Y \cdot 4 \\
4Y &= X
\end{aligned}$$

e, sabendo que em $(4\,\mathrm{s})$ o móvel está na posição $S\,(4\,\mathrm{s}) = 6\,\mathrm{m}$, temos

$$\begin{aligned}
S &= S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\
\underbrace{S}_{6} &= \underbrace{S_0}_{-2} + \underbrace{v_0}_{X} \cdot \underbrace{t}_{4} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{a}_{-Y} \cdot \underbrace{t}_{4}^{\,2} \\
6 &= -2 + X \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot (-Y) \cdot 4^2 \\
6 &= -2 + 4X - 8Y \\
6 + 2 + 8Y &= 4X \\
8 + 8Y &= 4X
\end{aligned}$$

usando da primeira relação que $X = 4Y$, logo $4X = 4\,(4Y) = 16Y$, inserindo esse resultado na segunda relação temos

$$\begin{aligned} 8 + 8Y &= \underbrace{4X}_{16Y} \\ 8 + 8Y &= 16Y \\ 8Y - 16Y &= -8 \\ -8Y &= -8 \\ 8Y &= 8 \\ Y &= \frac{8}{8} \end{aligned}$$

$$\boxed{Y = 1}$$

se $Y = 1$, retornando para a primeira relação $X = 4Y$, temos que $X = 4 \cdot 1$. Logo

$$\boxed{X = 4}$$

Assim, temos que

$$\boxed{v_0 = X = 4\,\mathrm{m/s}}$$

e

$$\boxed{a = -Y = -1\,\mathrm{m/s^2}}$$

Com isso podemos construir as duas equações horárias para esse móvel

$$\boxed{S = -2 + 4 \cdot t - 0{,}5 \cdot t^2}$$

$$\boxed{v = 4 - t}$$

No gráfico **c** temos que o mesmo caracteriza um **movimento uniformemente variado** (linha vermelha relativa à **velocidade** (v) é variável de modo linear ao passar do **tempo** (t)). Podemos determinar que a **velocidade inicial** é $(v_0 = 2\,\mathrm{m/s})$, logo se trata de um movimento **progressivo** ao iniciar seu deslocamento. Por haver uma **inclinação** da reta relativa à **velocidade** para **cima**, sabemos se tratar de um movimento com **aceleração positiva**. Sabendo que passados $(t = 7\,\mathrm{s})$ o móvel possui velocidade $[v\,(7\,\mathrm{s}) = 4\,\mathrm{m/s}]$, podemos determinar a aceleração através da equação 3.1

$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$4 = 2 + a \cdot 7$$
$$4 - 2 = 7a$$
$$\frac{2}{7} = a$$

logo

$$\boxed{a = \frac{2}{7}\,\mathrm{m/s^2}}$$

Como, por se tratar de um gráfico $(v \times t)$, não podemos determinar a posição do móvel (para isso precisaríamos conhecer S_0), embora, como veremos adiante, a área sob a curva forneça o deslocamento, nos resta determinar a equação horária da velocidade para este móvel

$$\boxed{v = 2 + \frac{2}{7} \cdot t}$$

No gráfico **d** temos que o mesmo caracteriza um **movimento uniformemente variado** (linha vermelha da aceleração constante e diferente de zero). É um movimento com aceleração constante de valor $(a = -3\,\mathrm{m/s^2})$. Nenhuma informação a respeito da velocidade inicial ou da posição é possível extrair deste gráfico por o mesmo se tratar de um gráfico $(a \times t)$.

Até aqui lemos posições, velocidades e acelerações diretamente nos eixos. Podemos obter mais informações observando a inclinação da curva e a área entre ela e o eixo do tempo. Iremos retomar esses recursos da leitura de gráficos, apresentados no Volume 1, e relacioná-los às grandezas do movimento.

No gráfico $(S \times t)$, a velocidade instantânea é dada pela inclinação da **reta tangente** à curva no ponto considerado. Uma tangente crescente indica velocidade positiva; uma decrescente, velocidade negativa. Quanto maior o módulo dessa inclinação, maior a rapidez, desde que comparemos gráficos com as mesmas escalas. No gráfico $(v \times t)$, a inclinação da tangente representa a aceleração, e a **área algébrica** entre a curva e o eixo do tempo fornece o deslocamento: as regiões acima do eixo entram com sinal positivo e as abaixo, com sinal negativo. Para obter a distância percorrida, somamos os módulos dessas áreas.

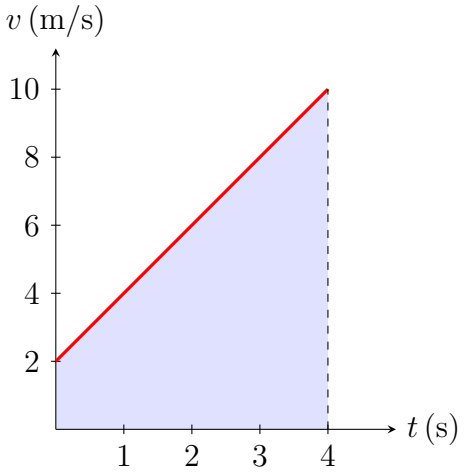
Usaremos essa relação no MUV com $v_0 > 0$ e $a > 0$. Entre 0 e t, a região sob a reta da velocidade é um trapézio que podemos dividir em um retângulo de base t e altura v_0 e um triângulo de base t e altura at. Somando as áreas, encontramos

$$\Delta S = \underbrace{v_0 t}_{\text{retângulo}} + \underbrace{\frac{1}{2} t(at)}_{\text{triângulo}} = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2.$$

Como $\Delta S = S - S_0$, recuperamos a equação 3.2. A relação também vale quando a velocidade diminui ou muda de sinal, desde que façamos a soma algébrica das áreas. Devemos ter claro que a área fornece o **deslocamento**; para conhecer a posição final, ainda precisamos somar a posição inicial.

Exemplo 3.6

Determine a aceleração e o deslocamento entre $t = 0$ e $t = 4\,\mathrm{s}$ usando o gráfico de velocidade abaixo.



Como a velocidade varia segundo uma reta, a aceleração é constante. Lemos $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$ e $v(4\,\mathrm{s}) = 10\,\mathrm{m/s}$; esses dois pontos já permitem calcular a inclinação.
Dividindo a variação da velocidade pelo intervalo de tempo, obtemos a **aceleração**:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{10\,\mathrm{m/s} - 2\,\mathrm{m/s}}{4\,\mathrm{s} - 0\,\mathrm{s}} = \frac{8}{4}\,\mathrm{m/s^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 2\,\mathrm{m/s^2}}$$

Para o **deslocamento**, calculamos a área do trapézio. Como toda a região está acima do eixo do tempo, essa área entra com sinal positivo:

$$\Delta S = \frac{(v_0 + v)}{2} \cdot t = \frac{(2 + 10)\ \mathrm{m/s}}{2} \cdot 4\,\mathrm{s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta S = 24\,\mathrm{m}}$$

Encontramos $24\,\mathrm{m}$ diretamente pelo gráfico. Podemos conferir pela equação horária: $\Delta S = 2 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4^2 = 24\,\mathrm{m}$. As duas representações descrevem o mesmo movimento.

3.3 Equação de Torricelli

Até agora sempre usamos equações que necessitam do tempo para descrever características de um dado movimento. O diferencial da equação de Torricelli, que recebe esse nome em homenagem ao físico italiano Evangelista Torricelli (1608-1647), é a possibilidade de não necessitar do tempo para obter características e informações de um movimento uniformemente variado. Em situações específicas o uso desta equação é bastante útil. Aproveitando para treinar um pouco da matemática básica que necessitamos para o desenvolvimento de nossos estudos em física, iremos agora deduzir a equação de Torricelli partindo das equações horárias do movimento uniformemente variado 3.1 e 3.2. Usaremos essas equações para isolar o tempo (t) e ficar com uma equação que não contenha essa grandeza. Assim, isolando o tempo em 3.1, temos

$$\begin{aligned} v &= v_0 + a \cdot t \\ v - v_0 &= a \cdot t \\ \frac{v - v_0}{a} &= t \end{aligned}$$

logo, manipulando 3.2, temos

$$\begin{aligned} S &= S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ S - S_0 &= v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ \underbrace{S - S_0}_{=\Delta S} &= v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \end{aligned}$$

usando que $t = \frac{v - v_0}{a}$, temos

$$\begin{aligned} \Delta S &= v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \\ \Delta S &= v_0 \cdot \left(\frac{v - v_0}{a} \right) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 \\ \Delta S &= \frac{v_0}{a} \cdot (v - v_0) + \frac{\cancel{a}}{2 \cdot a^{\cancel{2}}} \cdot (v - v_0)^2 \\ \Delta S &= \frac{v_0 \cdot v}{a} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{1}{2 \cdot a} (v - v_0)^2 \end{aligned}$$

lembrando que $(v - v_0)^2 = v^2 - 2 \cdot v \cdot v_0 + v_0^2$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta S &= \frac{v_0 \cdot v}{a} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{1}{2 \cdot a}(v - v_0)^2 \\
\Delta S &= \frac{v_0 \cdot v}{a} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{1}{2 \cdot a}\left(v^2 - 2 \cdot v \cdot v_0 + v_0^2\right) \\
\Delta S &= \frac{v_0 \cdot v}{a} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{\left(v^2 - 2 \cdot v \cdot v_0 + v_0^2\right)}{2 \cdot a} \\
\Delta S &= \frac{v_0 \cdot v}{a} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{v^2}{2 \cdot a} - \frac{2 \cdot v \cdot v_0}{2 \cdot a} + \frac{v_0^2}{2 \cdot a} \\
\Delta S &= \cancel{\frac{v_0 \cdot v}{a}} - \frac{v_0^2}{a} + \frac{v^2}{2 \cdot a} - \cancel{\frac{v \cdot v_0}{a}} + \frac{v_0^2}{2 \cdot a} \\
\Delta S &= -\frac{v_0^2}{a} + \frac{v^2}{2 \cdot a} + \frac{v_0^2}{2 \cdot a} \\
\Delta S &= \frac{-2 \cdot v_0^2 + v^2 + v_0^2}{2 \cdot a} \\
2 \cdot a \cdot \Delta S &= -2 \cdot v_0^2 + v^2 + v_0^2 \\
2 \cdot a \cdot \Delta S &= v^2 - 2 \cdot v_0^2 + v_0^2 \\
2 \cdot a \cdot \Delta S &= v^2 - v_0^2 \\
v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta S &= v^2
\end{aligned}$$

Assim, a **Equação de Torricelli** fica

EQUAÇÃO DE TORRICELLI

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta S \tag{3.3}$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

- $v \rightarrow$ velocidade final
- $v_0 \rightarrow$ velocidade inicial
- $a \rightarrow$ aceleração (constante)
- $\Delta S \rightarrow$ deslocamento

Todas as equações estudadas até agora se resumem às três equações do MUV, 3.1, 3.2 e 3.3. Aplicando-se corretamente os parâmetros nestas três equações elas recaem em todas as outras estudadas até aqui.

Para simplificar a notação a partir de agora **não será mais usado** em todos os casos o sinal de ponto $(\cdot)$ para simbolizar multiplicação. A **multiplicação será então subentendida ao ver duas grandezas lado a lado** em uma equação. O uso do sinal de ponto $(\cdot)$ somente será usado em casos específicos para destacar a multiplicação.

Dessa forma as equações 3.1, 3.2 e 3.3 podem ser visualizadas da seguinte maneira

$$\begin{aligned} v &= v_0 + a \cdot t &&\longrightarrow && v &= v_0 + at \\ S &= S_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 &&\longrightarrow && S &= S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v^2 &= v_0^2 + 2 \cdot a \cdot \Delta S &&\longrightarrow && v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta S \end{aligned}$$

Exemplo 3.7

Qual o deslocamento até parar, de um veículo que sofre uma desaceleração de $2\,\mathrm{m/s^2}$ quando estava a $20\,\mathrm{m/s}$?

Dados do problema

$$\begin{aligned} \Delta S &= ? \\ v &= 0\,\mathrm{m/s} \\ a &= -2\,\mathrm{m/s^2} \\ v_0 &= 20\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Usando a equação de Torricelli 3.3

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta S \\ (0\,\mathrm{m/s})^2 &= (20\,\mathrm{m/s})^2 + 2 \cdot \left(-2\,\mathrm{m/s^2}\right) \cdot \Delta S \\ 0 &= 400\,\mathrm{m^2/s^2} - 4\,\mathrm{m/s^2} \cdot \Delta S \\ 4\,\mathrm{m/s^2} \cdot \Delta S &= 400\,\mathrm{m^2/s^2} \\ \Delta S &= \frac{400\,\mathrm{m^{\cancel{2}}/s^{\cancel{2}}}}{4\,\mathrm{\cancel{m}/s^{\cancel{2}}}} \end{aligned}$$

logo, o deslocamento até parar é

$$\boxed{\Delta S = 100\,\mathrm{m}}$$

Exemplo 3.8

Um carro que está a uma velocidade de $108\,\mathrm{km/h}$ ao avistar o sinal vermelho aciona os freios e para após percorrer $45\,\mathrm{m}$. Qual o tempo de frenagem?

Dados do problema

$$\begin{aligned} v_0 &= 108\,\mathrm{km/h} = 30\,\mathrm{m/s} \\ v &= 0\,\mathrm{m/s} \\ \Delta S &= 45\,\mathrm{m} \\ a &= ? \\ t &= ? \end{aligned}$$

Usando a equação de Torricelli 3.3 podemos descobrir o valor da desaceleração

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta S \\ (0\,\mathrm{m/s})^2 &= (30\,\mathrm{m/s})^2 + 2 \cdot a \cdot 45\,\mathrm{m} \\ 0 &= 900\,\mathrm{m^2/s^2} + 90\,\mathrm{m} \cdot a \\ 90\,\mathrm{m} \cdot a &= -900\,\mathrm{m^2/s^2} \\ a &= \frac{-900\,\mathrm{m^{\cancel{2}}/s^2}}{90\,\cancel{\mathrm{m}}} \end{aligned}$$

$$\boxed{a = -10\,\mathrm{m/s^2}}$$

Conhecendo a aceleração, podemos aplicar tanto a equação 3.1 quanto a equação 3.2 para descobrir o tempo (t). Para **exemplificar**, aqui será feito o cálculo com ambas. Ficará claro qual a mais simples de ser aplicada nesta situação. Usando 3.1, temos

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ 0\,\mathrm{m/s} &= 30\,\mathrm{m/s} - 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot t \\ 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot t &= 30\,\mathrm{m/s} \\ t &= \frac{30\,\cancel{\mathrm{m}}/\cancel{\mathrm{s}}}{10\,\cancel{\mathrm{m}}/\mathrm{s}^{\cancel{2}}} \end{aligned}$$

$$\boxed{t = 3\,\mathrm{s}}$$

Agora usando 3.2. Temos que sendo o deslocamento total igual a $45\,\mathrm{m}$, tomamos como posição inicial $(S_0 = 0\,\mathrm{m})$ e posição final $(S = 45\,\mathrm{m})$. Assim

$$\begin{aligned} S &= S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ 45\,\mathrm{m} &= 0\,\mathrm{m} + (30\,\mathrm{m/s}) \cdot t - \left(\frac{10}{2}\,\mathrm{m/s^2}\right) \cdot t^2 \\ 45\,\mathrm{m} &= (30\,\mathrm{m/s}) \cdot t - \left(5\,\mathrm{m/s^2}\right) \cdot t^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\left(5\,\mathrm{m/s^2}\right) \cdot t^2 - (30\,\mathrm{m/s}) \cdot t + 45\,\mathrm{m} = 0}$$

Resolvendo por Bhaskara (Vol. 1), onde $A = (5\,\mathrm{m/s^2})$, $B = (-30\,\mathrm{m/s})$ e $C = (45\,\mathrm{m})$, temos

$$\begin{aligned} t', t'' &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ t', t'' &= \frac{30\,\mathrm{m/s} \pm \sqrt{(-30\,\mathrm{m/s})^2 - 4 \cdot 5\,\mathrm{m/s^2} \cdot 45\,\mathrm{m}}}{2 \cdot 5\,\mathrm{m/s^2}} \\ t', t'' &= \frac{30\,\mathrm{m/s} \pm \sqrt{900\,\mathrm{m^2/s^2} - 900\,\mathrm{m^2/s^2}}}{10\,\mathrm{m/s^2}} \\ t', t'' &= \frac{30\,\mathrm{m/s} \pm \sqrt{0\,\mathrm{m^2/s^2}}}{10\,\mathrm{m/s^2}} \\ t', t'' &= \frac{30\,\mathrm{m/s} \pm 0}{10\,\mathrm{m/s^2}} \\ t' = t'' &= \frac{30\cancel{\mathrm{m/s}}}{10\cancel{\mathrm{m/s^2}}} \end{aligned}$$

logo

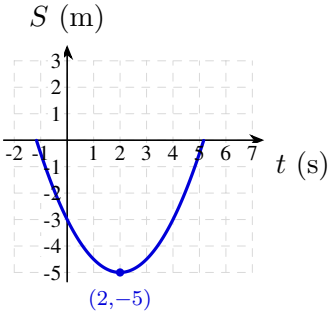
$$\boxed{t = 3\,\mathrm{s}}$$

Síntese do capítulo

No MUV, a aceleração permanece constante e a velocidade sofre variações iguais em intervalos de tempo iguais. Podemos calcular $v = v_0 + at$ e $S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, ou usar $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta S$ quando o tempo não interessa ao problema. O gráfico $S \times t$ é uma parábola; o gráfico $v \times t$ é uma reta, cuja inclinação fornece a aceleração e cuja área algébrica fornece o deslocamento.

Lista de exercícios 3

1. Qual a principal característica de um movimento uniformemente variado?
2. O que ocorre com a velocidade ao longo do tempo em um MUV?
3. O que ocorre com a posição ao longo do tempo em um MUV?
4. Dadas as seguintes equações horárias da velocidade no S.I., determine os dados possíveis e a velocidade no tempo $7\,\mathrm{s}$.
   a) $v = 8 + 2t$ **c)** $v = -2t$ **e)** $v = t$
   b) $v = 16 - 7t$ **d)** $v = 14 + t$
5. Dadas as seguintes equações horárias da posição no S.I., determine os dados possíveis e a posição no tempo $7\,\mathrm{s}$.
   a) $S = 8 + 2t + 4t^2$ **c)** $S = -2t + 6t^2$ **e)** $S = -\frac{1}{2}t^2$
   b) $S = 6 - 2t - 2t^2$ **d)** $S = -4 + t^2$ **f)** $S = 3 + 2t$
6. Um carro parte do repouso, em movimento uniformemente variado, da posição $S = 2\,\mathrm{m}$ e após $3\,\mathrm{s}$ se encontra com velocidade $6\,\mathrm{m/s}$. Determine a aceleração e mostre a equação horária da velocidade e da posição para este carro. Qual a posição no tempo $3\,\mathrm{s}$, $10\,\mathrm{s}$ e $20\,\mathrm{s}$?
7. Monte a equação horária da posição e da velocidade e determine a posição no tempo $12\,\mathrm{s}$ para um veículo que se movimenta conforme o gráfico ao lado.



8. Monte um gráfico de eixos $S \times t$ e outros de eixos $v \times t$ e $a \times t$, para um móvel que se movimenta conforme a equação horária $S = -2 + 3t - 2t^2$ no S.I. até o tempo de $t = 6\,\mathrm{s}$.
9. Dado um veículo **A** que se movimenta com função horária da posição $S = 3 + 4t + 2t^2$ e um veículo **B** com equação horária da posição $S = 18 - 3t - t^2$. Quanto tempo leva para esses veículos se cruzarem e em que posição isso ocorre?
10. Um carro **A** parte da posição $S = -40\,\mathrm{m}$ com velocidade constante $v = 108\,\mathrm{km/h}$. Em que posição o carro **A** ultrapassa um carro **B**, que parte simultaneamente da posição $S = 300\,\mathrm{m}$ com equação horária da velocidade no S.I. $v = 5 - t$?
11. Um veículo precisa de $20\,\mathrm{m}$ para ir de $0\,\mathrm{km/h}$ até $100\,\mathrm{km/h}$. Qual a aceleração deste veículo? Quanto tempo ele leva para ter essa variação de velocidade?
12. Qual a velocidade inicial de um móvel que precisa percorrer $200\,\mathrm{m}$ com uma desaceleração de $4\,\mathrm{m/s^2}$ até parar?

4

Queda Livre e Lançamento Vertical

O que você vai aprender

- Aplicar o modelo do MUV à queda vertical sob ação apenas da gravidade.
- Escolher a orientação do eixo vertical e atribuir os sinais das grandezas.
- Calcular alturas, velocidades e tempos em lançamentos verticais.
- Identificar em que condições a subida e a descida são simétricas.

Por que estudamos isto? Ao soltar uma pedra ou lançar uma bola para cima, podemos acompanhar a mudança de sua velocidade durante a queda ou a subida. Desprezando a resistência do ar e tomando a gravidade como constante, descrevemos esses movimentos pelas equações do MUV. Vamos começar pela direção vertical, que também nos ajudará a compreender os lançamentos em duas dimensões.

4.1 Queda livre

Como vimos, o conceito básico do **movimento uniformemente variado** é a presença de uma **aceleração constante**. Existe uma característica da natureza com que convivemos diariamente que ocorre com uma aceleração constante. Essa característica é a influência da **aceleração da gravidade** nos corpos. Estudaremos no momento apropriado as propriedades específicas do conceito de gravidade, mas agora focaremos no fato de a mesma ser uma aceleração constante. Logo, teremos movimentos uniformemente variados derivados da aceleração da gravidade. O movimento mais simples de se estudar com a aceleração da gravidade é a **queda livre** de corpos, também chamada de **movimento de queda livre** (MQL). A palavra livre, que acompanha queda, está relacionada a não levarmos em conta outras interações do movimento que não sejam somente a queda do corpo em questão. Ou seja, desprezamos atrito com o ar, forma do corpo em queda, propulsão etc.

Aqui aplicaremos todos os conceitos básicos estudados até agora. É importante reparar que poderão surgir novas equações mas que todas derivam apenas das três equações que determinamos serem básicas até agora (3.1, 3.2 e 3.3), ou seja, qualquer nova equação deriva destas três e saber aplicar as mesmas é muito melhor do que simplesmente decorar o grande número de equações específicas a cada situação que surgirão[1].

O **entendimento principal** a ser desenvolvido para compreensão do **movimento de queda livre** diz respeito à estrutura de **coordenadas escolhidas**. Caso

[1]Fica aqui o alerta de que embora seja mais rápido aplicar diretamente as novas equações (decorar todas as equações) a cada caso específico, como surgirá um grande número de equações relacionadas a todas novas situações que estudaremos, conhecer somente as três equações básicas do MUV e saber deduzir as demais equações dessas é apostar na eficiência da lógica deixando como opção reserva a memória.

se escolha que o sistema de coordenadas tenha um **sentido de baixo para cima**, como na figura 4.1, teremos um conjunto de equações derivadas. Caso se escolha que o sistema de coordenadas seja no **sentido de cima para baixo**, como na figura 4.2, teremos outro conjunto de equações. Esse é um exemplo do motivo para se estar salientando que memorizar equações é um trabalho muito mais desgastante do que simplesmente saber aplicar as equações principais. A cada momento, ao se fazer pequenas escolhas distintas, um novo conjunto de equações surge. O que pode confundir e fazer com que muitos erros sejam cometidos. Entender a lógica que leva a tais equações é certamente menos arriscado e, no fim das contas, menos trabalhoso.

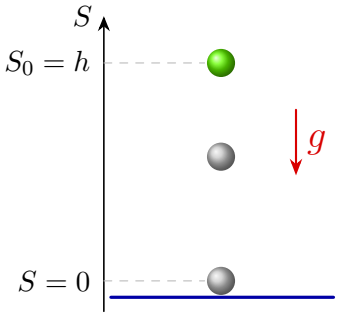


Figura 4.1: Queda livre com referencial para cima.

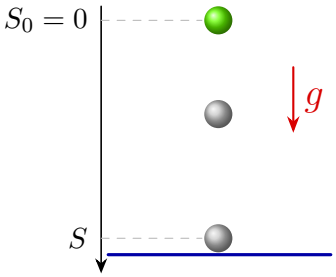


Figura 4.2: Queda livre com referencial para baixo.

Iremos agora deduzir as equações derivadas das equações do MUV para o primeiro caso (4.1) e após para o segundo caso (4.2). Atente que embora possamos usar o sistema de coordenadas que quisermos, em ambas as situações o movimento é o mesmo, uma bola cai em direção ao solo. Logo, usando os sistemas distintos o resultado deve ser o mesmo.

4.1.1 Caso 1 - referencial para cima

Nesta situação, a bola cai de uma posição inicial[2] que chamamos de $(S_0 = h)$. O sistema de coordenadas, com **sentido para cima**, coloca como posição de referência o solo. Logo, ao chegar ao solo a bola chegará na posição $(S = 0)$. Se quisermos saber uma posição anterior ao solo simplesmente deixamos a posição final sendo representada por (S).

Em um movimento de queda livre o corpo começa sua movimentação no ato de início da queda. Logo, sua **velocidade inicial** é nula $(v_0 = 0)$ (dizemos que **parte do repouso**). Podemos ter movimentos de queda com velocidade inicial **diferente de zero**, mas nesse caso a análise do movimento **não partirá do repouso**.

Por fim, nos resta analisar a aceleração do movimento. A aceleração da gravidade é sempre em **sentido ao centro da Terra**. Ou seja, na **mesma direção**

[2] O uso da letra (h) deriva da palavra em inglês *height* que significa **altura**.

do sistema de coordenadas que escolhemos mas no **sentido oposto**. Assim, usaremos a **aceleração** como sendo **negativa**. Costumamos arredondar[3] o valor da aceleração da gravidade para

$$\boxed{g = 10\,\mathrm{m/s^2}}$$

com isso teremos que nesta situação a **aceleração do movimento** terá valor $(a = -g = -10\,\mathrm{m/s^2})$.

Considerando que as unidades de medidas nesta situação são metro $[\mathrm{m}]$ e segundo $[\mathrm{s}]$, temos que

$$\begin{aligned} S_0 &= h \\ v_0 &= 0\,\mathrm{m/s} \\ a &= -g = -10\,\mathrm{m/s^2} \end{aligned}$$

Inserindo esses dados nas equações 3.1, 3.2 e 3.3 temos as seguintes equações derivadas

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ v &= 0 - gt \end{aligned}$$

$$\boxed{v = -gt} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} S &= S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ S &= h + 0t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{S = h - \frac{1}{2}gt^2} \tag{4.2}$$

[3]Caso seja necessário um valor mais próximo do real para a aceleração da gravidade deve ser usado $\left(g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}\right)$.

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta S$$
$$v^2 = 0^2 - 2g\,(S - h)$$

$$\boxed{v^2 = 2g\,(h - S)} \tag{4.3}$$

Sendo assim, usando este exato sistema de coordenadas com essas exatas atribuições de valores de referenciais teremos que a equação 4.1 serve como equação horária da velocidade, a equação 4.2 serve como equação horária da posição e a equação 4.3 serve como equação de Torricelli para queda livre.

4.1.2 Caso 2 - referencial para baixo

Nesta situação, colocamos o referencial do sistema de coordenadas na posição inicial do corpo. A bola cai de uma posição inicial $(S_0 = 0)$. Ao chegar ao solo a bola chegará numa posição (S) qualquer. Sua **velocidade inicial** é nula $(v_0 = 0)$.

A aceleração da gravidade é sempre em **sentido ao centro da Terra**. Ou seja, na **mesma direção** do sistema de coordenadas que escolhemos e no **mesmo sentido**. Assim, usaremos a **aceleração** como sendo **positiva**. Nesta situação a **aceleração do movimento** terá valor $(a = g = 10\,\mathrm{m/s^2})$.

Considerando que as unidades de medidas nesta situação são metro $[\mathrm{m}]$ e segundo $[\mathrm{s}]$, temos que

$$S_0 = 0\,\mathrm{m}$$
$$v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$$
$$a = g = 10\,\mathrm{m/s^2}$$

Inserindo esses dados nas equações 3.1, 3.2 e 3.3 temos as seguintes equações derivadas

$$v = v_0 + at$$
$$v = 0 + gt$$

$$\boxed{v = gt} \tag{4.4}$$

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$
$$S = 0 + 0t + \frac{1}{2} g t^2$$

$$\boxed{S = \frac{1}{2} g t^2} \tag{4.5}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta S$$
$$v^2 = 0^2 + 2g\,(S - 0)$$

$$\boxed{v^2 = 2gS} \tag{4.6}$$

Sendo assim, usando este exato sistema de coordenadas, com essas exatas atribuições de valores de referenciais, teremos que a equação 4.4 serve como equação horária da velocidade, a equação 4.5 serve como equação horária da posição e a equação 4.6 serve como equação de Torricelli para queda livre.

RESUMINDO

MUV	**MQL** **Referencial para Cima**	**MQL** **Referencial para Baixo**
$v = v_0 + at$	$v = -gt$	$v = gt$
$S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$S = h - \frac{1}{2} g t^2$	$S = \frac{1}{2} g t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta S$	$v^2 = 2g\,(h - S)$	$v^2 = 2gS$

4.1.3 Deslocamento a cada segundo

É importante perceber a relação do deslocamento de queda ao longo do tempo. Usando que um corpo parte do **repouso** ($v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$), com aceleração da gravidade ($g = 10\,\mathrm{m/s^2}$), considerando a **posição inicial** ($S_0 = 0\,\mathrm{m}$) com sentido de coordenadas para **baixo**. Podemos, analisando a tabela 4.1 e a figura 4.3, perceber que a cada segundo a distância percorrida pelo corpo em queda livre é cada vez

maior. Exceto no primeiro segundo, onde o deslocamento é de $(5\,\mathrm{m} = d)$, nos demais intervalos de $(1\,\mathrm{s})$, sempre há um incremento no quanto o corpo se desloca em $(10\,\mathrm{m} = 2d)$. Obviamente que essa quantidade acompanha o **valor da aceleração da gravidade**. Se a aceleração da gravidade tivesse outra medida, o deslocamento (d) também seria outro, mas manteria a mesma lógica de proporção. Perceba também que não são levadas em conta propriedades como o formato do objeto[4] nem mesmo a massa do objeto. Sendo assim, uma afirmação importante de ser aqui citada e que será objeto de uma maior investigação futura é que

> Desprezando o ar, todos os corpos que caem da mesma altura
> chegam ao solo no mesmo intervalo de tempo e com a mesma velocidade.

Tempo [s]	**Aceleração** [m/s²]	**Velocidade** [m/s]	**Posição** [m]	**Deslocamento no último segundo** [m]
0	10	0	0	0
1	10	10	5	5
2	10	20	20	15
3	10	30	45	25
4	10	40	80	35
5	10	50	125	45

Tabela 4.1: Tabela de Deslocamento no MQL.

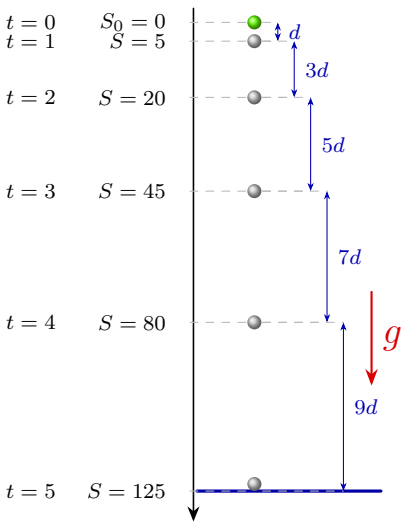


Figura 4.3: Movimento de queda ao longo do tempo de 5 segundos.

[4]Desconsideramos no MQL a força de contato com o ar.

Exemplo 4.1

Qual o tempo de queda de um corpo que parte do repouso do alto de um prédio de $245\,\mathrm{m}$? Qual sua velocidade de impacto com o solo?

RESOLVENDO USANDO REFERENCIAL PARA CIMA

Dados do problema
Resolvendo o problema considerando o **referencial para cima**, e atribuindo ao solo a posição de referência, temos

$$\begin{aligned} t &= ? \\ v_0 &= 0\,\mathrm{m/s} \\ a &= -g = -10\,\mathrm{m/s^2} \\ S_0 &= h = 245\,\mathrm{m} \\ S_f &= S = 0\,\mathrm{m} \\ v &= ? \end{aligned}$$

Usando a equação 3.2 e resolvendo usando o sistema de **coordenadas para cima**, temos

$$\begin{aligned} S &= S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ S &= h + 0t - \frac{1}{2}gt^2 \\ S &= h - \frac{1}{2}gt^2 \\ 0 &= 245\,\mathrm{m} - \frac{1}{2}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2}\cdot t^2 \\ 0 &= 245\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m/s^2}\cdot t^2 \\ 5\,\mathrm{m/s^2}\cdot t^2 &= 245\,\mathrm{m} \\ t^2 &= \frac{245\,\cancel{\mathrm{m}}}{5\,\cancel{\mathrm{m}}/\mathrm{s^2}} \\ t^2 &= 49\,\mathrm{s^2} \\ t &= \sqrt{49\,\mathrm{s^2}} \\ t &= \pm 7\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

logo, o tempo de queda é um valor positivo, portanto

$$\boxed{t = 7\,\mathrm{s}}$$

Para calcular a velocidade podemos usar a equação 3.1. Assim

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ v &= 0 - gt \\ v &= -gt \\ v &= -10\,\mathrm{m/s^{\cancel{2}}} \cdot 7\,\mathrm{\cancel{s}} \end{aligned}$$

Sendo a velocidade no sentido oposto ao do sistema de coordenadas, ela será negativa, logo

$$\boxed{v = -70\,\mathrm{m/s}}$$

Poderíamos também ter calculado a velocidade antes mesmo de saber o tempo de queda, usando a equação 3.3

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta S \\ v^2 &= 0 - 2g\,(0 - h) \\ v^2 &= 2gh \\ v^2 &= 2 \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 245\,\mathrm{m} \\ v &= \sqrt{4900\,\mathrm{m^2/s^2}} \\ v &= \pm 70\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Sabendo que no momento do impacto com o solo o corpo possui velocidade no sentido oposto ao sistema de coordenadas adotado, temos que a velocidade é negativa, portanto

$$\boxed{v = -70\,\mathrm{m/s}}$$

RESOLVENDO USANDO REFERENCIAL PARA BAIXO

Dados do problema

Resolvendo o mesmo problema considerando agora o **referencial para baixo**, e atribuindo ao ponto de partida a posição de referência, temos

$$t = ?$$

$$
\begin{aligned}
v_0 &= 0\,\mathrm{m/s} \\
a &= g = 10\,\mathrm{m/s^2} \\
S_0 &= 0\,\mathrm{m} \\
S_f &= S = 245\,\mathrm{m} \\
v &= ?
\end{aligned}
$$

Usando a equação 3.2 e resolvendo usando o sistema de **coordenadas para baixo**, temos

$$
\begin{aligned}
S &= S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\
S &= 0 + 0t + \frac{1}{2} g t^2 \\
S &= \frac{1}{2} g t^2 \\
245\,\mathrm{m} &= \frac{1}{2} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot t^2 \\
245\,\mathrm{m} &= 5\,\mathrm{m/s^2} \cdot t^2 \\
\frac{245\cancel{\mathrm{m}}}{5\cancel{\mathrm{m}}/\mathrm{s^2}} &= t^2 \\
49\,\mathrm{s^2} &= t^2 \\
t &= \sqrt{49\,\mathrm{s^2}} \\
t &= \pm 7\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

logo, o tempo de queda é um valor positivo, portanto

$$\boxed{t = 7\,\mathrm{s}}$$

Para calcular a velocidade podemos usar a equação 3.1. Assim

$$
\begin{aligned}
v &= v_0 + at \\
v &= 0 + gt \\
v &= +gt \\
v &= +10\,\mathrm{m/\cancel{s^2}} \cdot 7\cancel{\mathrm{s}}
\end{aligned}
$$

Sendo a velocidade no mesmo sentido do sistema de coordenadas, ela será

positiva, logo

$$\boxed{v = +70\,\mathrm{m/s}}$$

Poderíamos também ter calculado a velocidade antes mesmo de saber o tempo de queda, usando a equação 3.3

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta S \\ v^2 &= 0 + 2g\,(S - 0) \\ v^2 &= 2gS \\ v^2 &= 2 \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 245\,\mathrm{m} \\ v &= \sqrt{4900\,\mathrm{m^2/s^2}} \\ v &= \pm 70\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Sabendo que no momento do impacto com o solo o corpo possui velocidade no mesmo sentido ao sistema de coordenadas adotado, temos que a velocidade é positiva, portanto

$$\boxed{v = +70\,\mathrm{m/s}}$$

Perceba que **independente** do sistema de coordenadas adotado, o **resultado físico é sempre o mesmo**, isso devido a se tratar do mesmo evento: o tempo de queda e o módulo da velocidade não mudam; o que muda é apenas o sinal, que depende do referencial escolhido. Essa resolução foi feita das **duas formas possíveis** para **mostrar** que a escolha do referencial **não muda o resultado**. Dito isso,

a **partir desse momento** será adotado para resolução dos demais exercícios
sempre o uso do **sistema de coordenadas para cima**.

Essa escolha é arbitrária a cada um que irá resolver o exercício. Como é inviável resolver sempre de ambos os modos, daqui para frente, será feito dessa maneira (sistema de coordenadas para cima).

Exemplo 4.2

Uma caixa, em MQL, cai de um avião. Sabendo que a caixa leva meio minuto para chegar ao solo, qual a altura do avião quando a caixa caiu e com que velocidade ela atinge o solo?

Dados do problema
Resolvendo o problema considerando o **referencial para cima**, e atribuindo ao solo a posição de referência, temos

$$\begin{aligned} t &= 0{,}5\,\text{min} = 0{,}5 \times 60\,\text{s} = 30\,\text{s} \\ v_0 &= 0\,\text{m/s} \\ a &= -g = -10\,\text{m/s}^2 \\ S_0 &= h = ? \\ S_f &= S = 0\,\text{m} \\ v &= ? \end{aligned}$$

Usando a equação 3.2 e resolvendo usando o sistema de **coordenadas para cima**, temos

$$\begin{aligned} S &= S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ S &= h + 0t - \frac{1}{2}gt^2 \\ S &= h - \frac{1}{2}gt^2 \\ 0 &= h - \frac{1}{2} \cdot 10\,\text{m/s}^2 \cdot (30\,\text{s})^2 \\ 0 &= h - 5\,\text{m/s}^{\cancel{2}} \cdot 900\text{s}^{\cancel{2}} \\ 0 &= h - 4{,}5 \times 10^3\,\text{m} \\ 4{,}5 \times 10^3\,\text{m} &= h \end{aligned}$$

logo, no momento da queda da caixa o avião estava na altura de

$$\boxed{h = 4{,}5\,\text{km}}$$

Para calcular a velocidade podemos usar a equação 3.1. Assim

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ v &= 0 - gt \\ v &= -gt \\ v &= -10\,\text{m/s}^{\cancel{2}} \cdot 30\text{s} \end{aligned}$$

Sendo a velocidade no sentido oposto ao do sistema de coordenadas, ela será negativa, logo

$$\boxed{v = -300\,\mathrm{m/s}}$$

Exemplo 4.3

Um vaso de flores, em MQL, caiu partindo do repouso do alto de um prédio. Tendo demorado $8\,\mathrm{s}$ para chegar ao solo, qual a altura do prédio? Qual velocidade de impacto com o solo? Qual o deslocamento no último segundo de queda?

Dados do problema

Resolvendo o problema considerando o **referencial para cima**, e atribuindo ao solo a posição de referência, temos

$$\begin{aligned}
t &= 8\,\mathrm{s}\\
v_0 &= 0\,\mathrm{m/s}\\
a &= -g = -10\,\mathrm{m/s^2}\\
S_0 &= h = ?\\
S_f &= S\,(8\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m}\\
v &= ?\\
S\,(7\,\mathrm{s}) &= ?\\
\Delta S\,(7\,\mathrm{s} \to 8\,\mathrm{s}) &= S\,(8\,\mathrm{s}) - S\,(7\,\mathrm{s}) = ?
\end{aligned}$$

Usando a equação 3.2 e resolvendo usando o sistema de **coordenadas para cima**, temos

$$\begin{aligned}
S &= S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\\
S &= h + 0t - \frac{1}{2}gt^2\\
S &= h - \frac{1}{2}gt^2\\
0 &= h - \frac{1}{2}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2}\cdot (8\,\mathrm{s})^2\\
0 &= h - 5\,\mathrm{m/\cancel{s^2}}\cdot 64\cancel{\mathrm{s^2}}\\
0 &= h - 320\,\mathrm{m}\\
320\,\mathrm{m} &= h
\end{aligned}$$

logo, a altura do prédio é

$$\boxed{h = 320\,\mathrm{m}}$$

Para calcular a velocidade podemos usar a equação 3.1. Assim

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ v &= 0 - gt \\ v &= -gt \\ v &= -10\,\mathrm{m/s^{\cancel{2}}} \cdot 8\,\mathrm{\cancel{s}} \end{aligned}$$

Sendo a velocidade no sentido oposto ao do sistema de coordenadas, ela será negativa, logo

$$\boxed{v = -80\,\mathrm{m/s}}$$

Para descobrir $\Delta S\,(7\,\mathrm{s} \to 8\,\mathrm{s})$ devemos saber a posição no tempo $7\,\mathrm{s}$. Assim, usando a equação 3.2

$$\begin{aligned} S &= S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ S &= h + 0t - \frac{1}{2} g t^2 \\ S &= h - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S\,(7\,\mathrm{s}) &= 320\,\mathrm{m} - \frac{1}{2} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot (7\,\mathrm{s})^2 \\ S\,(7\,\mathrm{s}) &= 320\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m/\cancel{s^2}} \cdot 49\,\mathrm{\cancel{s^2}} \\ S\,(7\,\mathrm{s}) &= 320\,\mathrm{m} - 245\,\mathrm{m} \\ S\,(7\,\mathrm{s}) &= 75\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

logo, se no tempo $7\,\mathrm{s}$ o vaso de flores estava na posição $S\,(7\,\mathrm{s}) = 75\,\mathrm{m}$ e no tempo $8\,\mathrm{s}$ o vaso de flores estava na posição $S\,(8\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m}$. Seu deslocamento no último segundo foi

$$\Delta S\,(7\,\mathrm{s} \to 8\,\mathrm{s}) = S\,(8\,\mathrm{s}) - S\,(7\,\mathrm{s})$$
$$\Delta S\,(7\,\mathrm{s} \to 8\,\mathrm{s}) = 0\,\mathrm{m} - 75\,\mathrm{m}$$

$$\boxed{\Delta S\,(7\,\mathrm{s} \to 8\,\mathrm{s}) = -75\,\mathrm{m}}$$

Exemplo 4.4

Em 1971, na missão Apollo 15, o astronauta David Scott mostrou, deixando cair na Lua um martelo e uma pena, que sem o ar todos os corpos caem juntos. Imagine que, nessa mesma situação, uma bola caia em MQL da altura de $1\,\mathrm{m}$. Sabendo que essa bola levou o tempo de $\sqrt{1{,}25\,\mathrm{s}^2}$ para chegar ao solo, qual o valor da aceleração da gravidade na Lua? Qual a velocidade de impacto da bola com o solo lunar? Qual o deslocamento no primeiro segundo de queda?

Dados do problema

Resolvendo o problema considerando o **referencial para cima**, e atribuindo ao solo a posição de referência, temos

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{1{,}25\,\mathrm{s}^2} \\ v_0 &= 0\,\mathrm{m/s} \\ a &= -g_{\text{lua}} = ? \\ S_0 &= h = 1\,\mathrm{m} \\ S_f &= S = 0\,\mathrm{m} \\ v &= ? \end{aligned}$$

Usando a equação 3.2 e resolvendo usando o sistema de **coordenadas para cima**, temos

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$
$$S = h + 0t - \frac{1}{2} g_{\text{lua}} t^2$$
$$S = h - \frac{1}{2} g_{\text{lua}} t^2$$

$$
\begin{aligned}
0 &= 1\,\mathrm{m} - \frac{1}{2}\cdot g_{\text{lua}} \cdot \left(\sqrt{1{,}25\,\mathrm{s}^2}\right)^2 \\
0 &= 1\,\mathrm{m} - \frac{1}{2}\cdot 1{,}25\,\mathrm{s}^2 \cdot g_{\text{lua}} \\
0 &= 1\,\mathrm{m} - 0{,}625\,\mathrm{s}^2 \cdot g_{\text{lua}} \\
0{,}625\,\mathrm{s}^2 \cdot g_{\text{lua}} &= 1\,\mathrm{m} \\
g_{\text{lua}} &= \frac{1\,\mathrm{m}}{0{,}625\,\mathrm{s}^2}
\end{aligned}
$$

logo, a aceleração da gravidade na Lua é

$$\boxed{g_{\text{lua}} = 1{,}6\,\mathrm{m/s}^2}$$

Para calcular a velocidade podemos usar a equação 3.1. Assim

$$
\begin{aligned}
v &= v_0 + at \\
v &= 0 - g_{\text{lua}} \cdot t \\
v &= -g_{\text{lua}} \cdot t \\
v &= -1{,}6\,\mathrm{m/s}^2 \cdot \sqrt{1{,}25\,\mathrm{s}^2} \\
v &= -1{,}6\,\mathrm{m/s}^2 \cdot 1{,}118\,\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

Sendo a velocidade no sentido oposto ao do sistema de coordenadas, ela será negativa. Logo, o impacto acontece com a velocidade

$$\boxed{v \simeq -1{,}79\,\mathrm{m/s}}$$

Para calcular o deslocamento no primeiro segundo somente precisamos descobrir a posição em $(t = 1\,\mathrm{s})$. Assim, usando a equação 3.2

$$
\begin{aligned}
S &= S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\
S &= h + 0t - \frac{1}{2}g_{\text{lua}} \cdot t^2 \\
S &= h - \frac{1}{2}g_{\text{lua}} \cdot t^2
\end{aligned}
$$

$$S = 1\,\mathrm{m} - \frac{1}{2} \cdot 1{,}6\,\mathrm{m/s^2} \cdot (1\,\mathrm{s})^2$$
$$S = 1\,\mathrm{m} - \frac{1}{2} \cdot 1{,}6\,\mathrm{m/\cancel{s^2}} \cdot 1\,\cancel{\mathrm{s^2}}$$
$$S = 1\,\mathrm{m} - 0{,}8\,\mathrm{m}$$
$$S\,(1\,\mathrm{s}) = 0{,}2\,\mathrm{m}$$

Sabendo que após $1\,\mathrm{s}$ o móvel se encontra na posição $S = 0{,}2\,\mathrm{m}$. E que partiu da posição inicial $S_0 = 1\,\mathrm{m}$, temos que o deslocamento foi

$$\Delta S = S - S_0$$
$$\Delta S = 0{,}2\,\mathrm{m} - 1\,\mathrm{m}$$

$$\boxed{\Delta S = -0{,}8\,\mathrm{m}}$$

O valor **negativo** do deslocamento é devido ao mesmo ter ocorrido no **sentido oposto** do sistema de coordenadas escolhido. Perceba que esse deslocamento tem valor $(d_{\text{lua}} = 0{,}8\,\mathrm{m})$, exatamente a **metade** do valor numérico da **aceleração da gravidade na Lua** $(g_{\text{lua}} = 1{,}6\,\mathrm{m/s^2})$. Assim como ocorre na Terra em que no **primeiro segundo** os corpos caem $(d = 5\,\mathrm{m})$ a **metade** do valor numérico da **aceleração da gravidade na Terra** $(g = 10\,\mathrm{m/s^2})$. Nos demais intervalos de $1\,\mathrm{s}$ os deslocamentos incrementam em $(2d_{\text{lua}})$ da mesma forma como ocorrem na Terra incrementos em $(2d)$, como visto na imagem 4.3.

4.2 Lançamento vertical

Teremos agora um pequeno incremento em nosso estudo do movimento uniformemente variado ocorrendo na vertical. No MQL consideramos somente a queda a partir do repouso. Agora analisamos o movimento ocorrendo em um lançamento de baixo para cima, ou de cima para baixo. Ou seja, considerando uma velocidade inicial. Essa velocidade será a responsável pelo lançamento em si. Seguiremos mantendo somente a direção vertical e novamente teremos de escolher o sistema de coordenadas sendo para cima[5] ou para baixo. O conceito básico deste movimento é que

[5]Conforme já citado anteriormente, será aqui adotado o sentido para cima. Mas os cálculos com sentido para baixo podem ser feitos mantendo as regras apresentadas no caso 2 do MQL.

somente há lançamento vertical se houver velocidade inicial $(v_0 \neq 0)$ na direção vertical.

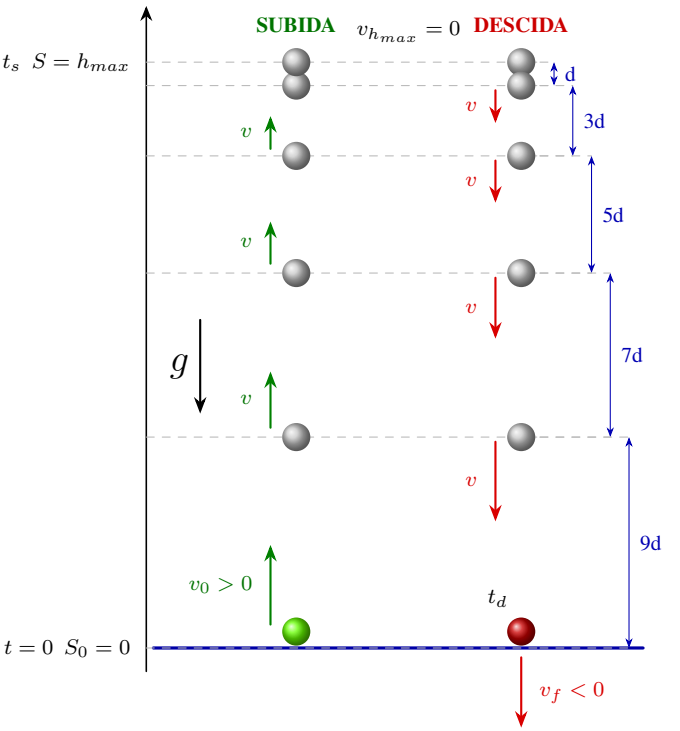


Figura 4.4: Bola arremessada para cima com velocidade inicial v_0 considerando a posição inicial $S_0 = 0$ como origem do sistema de coordenadas para cima.

Adotando o sistema de **coordenadas para cima**, conforme figura 4.4, temos que o corpo terá uma posição inicial $(S_0 = 0)$ e uma velocidade inicial (v_0) que carrega as seguintes informações:

- $v_0 > 0$ movimento de subida[6];
- $v_0 < 0$ movimento de descida;

No caso de um corpo **lançado para cima** $(v_0 > 0)$, o mesmo começará em um movimento **progressivo retardado** (aceleração da gravidade em sentido oposto ao sistema de coordenadas adotado $a = -g = -10\,\mathrm{m/s^2}$) até alcançar uma altura máxima, onde sua velocidade se tornará nula $(v_{\mathrm{hmax}} = 0)$ e então o corpo mudará seu sentido de movimento $(v < 0)$, indo a partir desse momento para baixo e passando a fazer um movimento **regressivo acelerado**.

Algumas informações são importantes de serem compreendidas e destacadas:

- Se o corpo parte de uma posição (S_0) e sobe, chega à altura máxima

[6]Válido no sistema de coordenadas para cima

$(v_{\text{hmax}} = 0)$ e depois retorna **para o mesmo nível** $(S_f = S_0)$, o **tempo** em que o corpo permaneceu **subindo** (t_s) é **exatamente igual** ao **tempo** de **descida** até o nível inicial (t_d). Ou seja,

$$t_s = t_d$$

Isso é válido sempre que não é considerado nenhum tipo de atrito com o ar e quando o movimento parte e termina no **mesmo nível** (posição);

- O **tempo total** (t_T), também chamado de **tempo de voo**, de um movimento em lançamento vertical é dado pela soma do **tempo de subida** (t_s) com o **tempo de descida** (t_d). Ou seja

$$t_T = t_s + t_d$$

- A **velocidade na altura máxima** será sempre nula

$$v_{\text{hmax}} = 0$$

- O sinal da aceleração **NÃO DEPENDE**, repito, **NÃO DEPENDE** se o movimento está subindo ou descendo. Segue dependendo **somente do sistema de coordenadas** adotado. Ou seja, sistema de coordenadas para cima $(a = -g)$ e sistema de coordenadas para baixo $(a = +g)$;
- A **velocidade** no movimento de **subida** e de **descida** possuem o **mesmo módulo** quando estão nos **mesmos níveis** mas com sentidos opostos;
- A **velocidade inicial de lançamento** $(v_0 > 0)$ para cima tem o **mesmo módulo** e sentido oposto $(v_0 = -v_f)$ da **velocidade final do movimento** $(v_f < 0)$ quando o ponto inicial e final do movimento são a mesma posição $(S_0 = S_f)$.

4.2.1 Equações do lançamento vertical

Como está sendo aqui considerado o sistema de **coordenadas para cima** $(a = -g)$, tomando que a **posição inicial** do movimento será a **posição de origem** do sistema de coordenadas, ou seja, $(S_0 = 0)$. As equações do movimento uniformemente variado 3.1, 3.2 e 3.3 ficam da seguinte forma

$$v = v_0 + at$$

$$\boxed{v = v_0 - gt} \tag{4.7}$$

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$
$$S = 0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\boxed{S = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2} \tag{4.8}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta S$$
$$v^2 = v_0^2 - 2g\left(S - S_0\right)$$
$$v^2 = v_0^2 - 2g\left(S - 0\right)$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 - 2gS} \tag{4.9}$$

Levando em conta que na altura máxima $(S = h_{\text{max}})$ a velocidade é nula $v_{\text{hmax}} = 0$ e aplicando isso na equação de Torricelli na forma de 4.9, temos

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 - 2gS \\ v_{\text{hmax}}^2 &= v_0^2 - 2gh_{\text{max}} \\ 0^2 &= v_0^2 - 2gh_{\text{max}} \\ 2gh_{\text{max}} &= v_0^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{h_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2g}} \tag{4.10}$$

Da equação 4.10 podemos definir que para chegar a uma certa altura, a veloci-

dade inicial do corpo deve ser dada por

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$
$$2gh_{\max} = v_0^2$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{2gh_{\max}}} \tag{4.11}$$

Considerando que o corpo **retorna** para a posição que partiu $(S_f = S_0 = 0)$ ao fim do movimento e aplicando em 4.8, temos que o **tempo total** (t_T) do movimento será

$$S = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$0 = v_0 t_T - \frac{1}{2}gt_T^2$$
$$\frac{1}{2}gt_T^{\cancel{2}} = v_0 \cancel{t_T}$$
$$\frac{1}{2}gt_T = v_0$$

$$\boxed{t_T = \frac{2v_0}{g}} \tag{4.12}$$

Sendo o **tempo total** (t_T), no caso em que o móvel **retorna** para a **posição de origem** ao fim do movimento, igual à soma dos tempos de **subida** (t_s) e **descida** (t_d), ou seja $(t_T = t_s + t_d)$. E sendo os tempos de subida e descida **iguais** $(t_s = t_d)$, temos que o **tempo total** pode ser dado como

$$t_T = 2t_s$$

ou

$$t_T = 2t_d$$

o que implica que

$$t_s = \frac{1}{2}t_T$$

e

$$t_d = \frac{1}{2}t_T$$

logo, usando 4.12, temos que

$$t_s = \frac{1}{2}\frac{2v_0}{g}$$

$$\boxed{t_s = \frac{v_0}{g}} \tag{4.13}$$

$$\boxed{t_d = \frac{v_0}{g}} \tag{4.14}$$

A equação 4.10 nos fornece a **altura máxima** que um corpo lançado para **cima** com **velocidade inicial** (v_0) pode atingir. As equações 4.12, 4.13 e 4.14 nos fornecem os **tempos** do movimento considerando início e fim deste na mesma posição.

É importante salientar novamente que as **equações derivadas** 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14 podem ser usadas somente no movimento com as **características iguais** das quais as mesmas foram deduzidas[7]. Por isso, o ideal é **saber aplicar** as **equações do movimento uniformemente variado** (3.1, 3.2 e 3.3) a cada situação específica e não somente decorar todas as equações de cada caso.

Exemplo 4.5

Qual a altura máxima atingida por um corpo arremessado para cima com velocidade inicial de $20\,\mathrm{m/s}$? Qual o tempo de subida e total de voo?

Dados do problema

$$\begin{aligned} S_f &= h_{\text{max}} = ? \\ v_0 &= 20\,\mathrm{m/s} \\ v_f &= v_{\text{hmax}} = 0\,\mathrm{m/s} \\ S_0 &= 0\,\mathrm{m} \\ a &= -g \\ g &= 10\,\mathrm{m/s^2} \\ t_s &= ? \\ t_T &= ? \end{aligned}$$

[7]Sistema de coordenadas para cima, considerando a posição inicial como sendo a origem do sistema e a posição final do movimento no mesmo ponto de partida.

Aplicando a equação 3.3, temos

$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta S \\ v_{\text{hmax}}^2 &= v_0^2 - 2g\,(h_{\text{max}} - 0) \\ v_{\text{hmax}}^2 &= v_0^2 - 2gh_{\text{max}} \\ 0^2 &= v_0^2 - 2gh_{\text{max}} \\ 2gh_{\text{max}} &= v_0^2 \\ h_{\text{max}} &= \frac{v_0^2}{2g} \\ h_{\text{max}} &= \frac{(20\,\text{m/s})^2}{2 \cdot 10\,\text{m/s}^2} \\ h_{\text{max}} &= \frac{400\,\text{m}^{\cancel{2}\,\overset{1}{}}\,/\cancel{s^2}}{20\cancel{\text{m}}/\cancel{s^2}} \end{aligned}$$

logo, a altura máxima atingida é de

$$\boxed{h_{\text{max}} = 20\,\text{m}}$$

Aplicando a equação 3.2, temos

$$\begin{aligned} S &= S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ S &= 0\,\text{m} + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \\ h_{\text{max}} &= v_0 t_s - \frac{1}{2}gt_s^2 \\ 20\,\text{m} &= 20\,\text{m/s} \cdot t_s - \frac{1}{2} \cdot 10\,\text{m/s}^2 \cdot t_s^2 \\ 20\,\text{m} &= 20\,\text{m/s} \cdot t_s - 5\,\text{m/s}^2 \cdot t_s^2 \\ 5\,\text{m/s}^2 \cdot t_s^2 - 20\,\text{m/s} \cdot t_s + 20\,\text{m} &= 0 \end{aligned}$$

Essa equação tem a forma $Ax^2+Bx+C=0$, onde $A = 5\,\text{m/s}^2$, $B = -20\,\text{m/s}$ e $C = 20\,\text{m}$. Usando a equação de Bhaskara, temos

$$x', x'' = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$t'_s, t''_s = \frac{-\left(-20\,\mathrm{m/s}\right) \pm \sqrt{\left(-20\,\mathrm{m/s}\right)^2 - 4\left(5\,\mathrm{m/s^2}\right)\left(20\,\mathrm{m}\right)}}{2\left(5\,\mathrm{m/s^2}\right)}$$

$$t'_s, t''_s = \frac{20\,\mathrm{m/s} \pm \sqrt{400\,\mathrm{m^2/s^2} - 400\,\mathrm{m^2/s^2}}}{10\,\mathrm{m/s^2}}$$

$$t'_s, t''_s = \frac{20\,\mathrm{m/s} \pm \sqrt{0}}{10\,\mathrm{m/s^2}}$$

$$t'_s, t''_s = \frac{20\cancel{\mathrm{m}}/\cancel{\mathrm{s}}}{10\cancel{\mathrm{m}}/\mathrm{s}^{\cancel{2}\,1}}$$

logo, o tempo de subida é

$$\boxed{t_s = 2\,\mathrm{s}}$$

Ou poderíamos ter usado a equação 3.1

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ v_{\mathrm{hmax}} &= v_0 - gt_s \\ 0 &= v_0 - gt_s \\ gt_s &= v_0 \\ t_s &= \frac{v_0}{g} \\ t_s &= \frac{20\cancel{\mathrm{m}}/\cancel{\mathrm{s}}}{10\cancel{\mathrm{m}}/\mathrm{s}^{\cancel{2}\,1}} \end{aligned}$$

$$\boxed{t_s = 2\,\mathrm{s}}$$

Perceba que como estamos usando exatamente as mesmas características das quais a equação 4.13 foi deduzida, poderíamos ter aplicado diretamente

$$\begin{aligned} t_s &= \frac{v_0}{g} \\ t_s &= \frac{20\cancel{\mathrm{m}}/\cancel{\mathrm{s}}}{10\cancel{\mathrm{m}}/\mathrm{s}^{\cancel{2}\,1}} \end{aligned}$$

$$\boxed{t_s = 2\,\mathrm{s}}$$

Sabendo que ao retornar ao mesmo nível o tempo total é dado por 4.12

$$t_T = \frac{2v_0}{g} = 2t_s$$
$$t_T = 2 \cdot 2\,\mathrm{s}$$
$$\boxed{t_T = 4\,\mathrm{s}}$$

Há distintas formas matemáticas de resolver o mesmo problema. Algumas mais simples e outras mais complexas. Somente a experiência ajudará no uso mais corriqueiro dos modos mais simples. Contudo, se a matemática é usada corretamente, todas as formas levam à mesma solução, a solução correta!

Exemplo 4.6

Um menino quer jogar sua bola para cima do telhado de um prédio. Sabendo que o prédio tem altura de $40\,\mathrm{m}$ e considerando um arremesso vertical sendo suficiente para o objetivo do menino. Qual velocidade inicial o menino deve empregar na bola para que a mesma chegue até a altura máxima do prédio? Qual tempo leva para essa bola chegar ao topo do prédio?

Dados do problema

$$S_f = h_{\text{max}} = 40\,\mathrm{m}$$
$$v_0 = ?$$
$$v_f = v_{\text{hmax}} = 0\,\mathrm{m/s}$$
$$S_0 = 0\,\mathrm{m}$$
$$a = -g$$
$$g = 10\,\mathrm{m/s^2}$$
$$t_s = ?$$

Aplicando a equação 3.3, temos

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta S$$
$$v_{\text{hmax}}^2 = v_0^2 - 2g\,(h_{\text{max}} - 0)$$
$$v_{\text{hmax}}^2 = v_0^2 - 2gh_{\text{max}}$$
$$0^2 = v_0^2 - 2gh_{\text{max}}$$
$$2gh_{\text{max}} = v_0^2$$

$$v_0 = \sqrt{2gh_{\text{max}}}$$
$$v_0 = \sqrt{2 \cdot 10\,\text{m/s}^2 \cdot 40\,\text{m}}$$
$$v_0 = \sqrt{800\,\text{m}^2/\text{s}^2}$$

logo, a velocidade inicial da bola deve ser

$$\boxed{v_0 \simeq 28{,}3\,\text{m/s}}$$

O tempo de subida pode ser calculado usando 4.13

$$t_s = \frac{v_0}{g}$$
$$t_s = \frac{28{,}3\cancel{\text{m}}/\cancel{\text{s}}}{10\cancel{\text{m}}/\text{s}^{\cancel{2}\,1}}$$

$$\boxed{t_s = 2{,}83\,\text{s}}$$

Exemplo 4.7

Uma bala de canhão é arremessada do solo em direção totalmente vertical com velocidade $500\,\text{m/s}$. Qual altura máxima atingida pela bala? Qual a velocidade na altura $1\,\text{km}$, $5\,\text{km}$ e $10\,\text{km}$? Qual o tempo total de voo até o retorno da bala ao solo? Qual a velocidade de impacto da bala com o solo?

Dados do problema

$$S_0 = 0\,\text{m}$$
$$v_0 = 500\,\text{m/s}$$
$$S_f = h_{\text{max}} = ?$$
$$v\,(1\,\text{km}) = ?$$
$$v\,(5\,\text{km}) = ?$$
$$v\,(10\,\text{km}) = ?$$
$$a = -g$$
$$g = 10\,\text{m/s}^2$$
$$t_T = ?$$
$$v_f\,(S = 0) = ?$$

Aplicando a equação 3.3, temos

$$\begin{aligned}
v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta S \\
v_{\text{hmax}}^2 &= v_0^2 - 2g\,(h_{\text{max}} - 0) \\
v_{\text{hmax}}^2 &= v_0^2 - 2gh_{\text{max}} \\
0^2 &= v_0^2 - 2gh_{\text{max}} \\
2gh_{\text{max}} &= v_0^2 \\
h_{\text{max}} &= \frac{v_0^2}{2g} \\
h_{\text{max}} &= \frac{(500\,\text{m/s})^2}{2\cdot 10\,\text{m/s}^2} \\
h_{\text{max}} &= \frac{250.000\,\text{m}^{\cancel{2}^{1}}/\cancel{\text{s}^2}}{20\,\cancel{\text{m}}/\cancel{\text{s}^2}} \\
h_{\text{max}} &= 12.500\,\text{m}
\end{aligned}$$

$$\boxed{h_{\text{max}} = 12{,}5\,\text{km}}$$

Para calcular a velocidade em posições específicas usamos a equação de Torricelli 3.3. Na posição $S = 1\,\text{km} = 1000\,\text{m}$, temos

$$\begin{aligned}
v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta S \\
v^2 &= v_0^2 - 2g\,(S - 0) \\
v^2 &= v_0^2 - 2gS \\
v^2 &= (500\,\text{m/s})^2 - 2\cdot 10\,\text{m/s}^2 \cdot 1000\,\text{m} \\
v^2 &= 250.000\,\text{m}^2/\text{s}^2 - 20.000\,\text{m}^2/\text{s}^2 \\
v^2 &= 230.000\,\text{m}^2/\text{s}^2 \\
v &= \sqrt{230.000\,\text{m}^2/\text{s}^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{v(1\,\text{km}) \simeq \pm 479{,}6\,\text{m/s}}$$

Para as outras duas alturas, $S = 5\,\text{km}$ e $S = 10\,\text{km}$, usamos novamente $v^2 = v_0^2 - 2gS$. Como ambas estão abaixo da altura máxima, a bala passa por cada uma na subida e na descida; por isso teremos dois sinais para a velocidade:

$$v^2 = 250.000\,\text{m}^2/\text{s}^2 - 100.000\,\text{m}^2/\text{s}^2 = 150.000\,\text{m}^2/\text{s}^2$$

$$v = \sqrt{150.000\,\mathrm{m^2/s^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(5\,\mathrm{km}) \simeq \pm 387{,}3\,\mathrm{m/s}}$$
$$v^2 = 250.000\,\mathrm{m^2/s^2} - 200.000\,\mathrm{m^2/s^2} = 50.000\,\mathrm{m^2/s^2}$$
$$v = \sqrt{50.000\,\mathrm{m^2/s^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(10\,\mathrm{km}) \simeq \pm 223{,}6\,\mathrm{m/s}}$$

O sinal $(\pm)$ é devido à velocidade ser positiva na subida e negativa na descida ao passar nas posições $(S = 1\,\mathrm{km})$, $(S = 5\,\mathrm{km})$ e $(S = 10\,\mathrm{km})$.
Aplicando 4.12 para descobrir o tempo total de voo, temos

$$t_T = \frac{2v_0}{g} = \frac{2 \cdot 500\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{m/s^2}} = \frac{1000\,\cancel{\mathrm{m}}/\cancel{\mathrm{s}}}{10\,\cancel{\mathrm{m}}/\cancel{\mathrm{s}}^{1}}$$

$$\boxed{t_T = 100\,\mathrm{s}}$$

Ao retornar ao solo a bala tem exatamente o mesmo valor de velocidade ao ter sido enviada para cima, mas com sinal oposto, ou seja

$$\boxed{v_{\text{solo}} = -500\,\mathrm{m/s}}$$

Síntese do capítulo

Podemos descrever os movimentos verticais pelas equações do MUV quando apenas a gravidade atua e seu módulo permanece aproximadamente constante, e nos nossos problemas usamos $g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$. Com o eixo para cima, usamos $a = -g$; com o eixo para baixo, $a = +g$. Se o corpo é lançado para cima, sua velocidade se anula no ponto mais alto, mas a aceleração continua apontando para baixo. Sem resistência do ar, o retorno a uma mesma altura ocorre com rapidez igual à da subida; os tempos de subida e descida são iguais quando comparamos o mesmo intervalo de alturas.

Lista de exercícios 4

1. Quais as características de um movimento de queda livre?
2. Qual a influência do peso de um corpo no MQL?
3. Como podemos definir o sistema de coordenadas e quais as diferenças entre esses em um MQL?
4. Qual a distância percorrida por um corpo que cai de $1000\,\mathrm{m}$ nos seguintes intervalos de tempo:
   a) $t = 0\,\mathrm{s}$ até $t = 1\,\mathrm{s}$
   b) $t = 1\,\mathrm{s}$ até $t = 2\,\mathrm{s}$
   c) $t = 2\,\mathrm{s}$ até $t = 3\,\mathrm{s}$
   d) $t = 3\,\mathrm{s}$ até $t = 5\,\mathrm{s}$
   e) $t = 6\,\mathrm{s}$ até $t = 8\,\mathrm{s}$
5. Quanto tempo demora para atingir o solo um corpo que cai de uma altura de $10\,\mathrm{m}$? Qual a velocidade de impacto com o solo?
6. Um corpo leva $15\,\mathrm{s}$ para atingir o solo após cair do repouso de uma altura desconhecida. Qual é a altura de que o corpo caiu? Qual a velocidade de impacto com o solo?
7. Uma bola caiu do repouso do alto de um prédio de $120\,\mathrm{m}$ de altura. Sabendo que a mesma caiu sobre o telhado de outro prédio de $40\,\mathrm{m}$ de altura, qual o tempo de queda da bola? Qual a velocidade de impacto com o telhado do prédio?
8. Sabendo que um corpo se deslocou $200\,\mathrm{m}$ após iniciar uma queda livre, qual a velocidade de impacto deste corpo após esse deslocamento?
9. Um corpo se desloca $45\,\mathrm{m}$ após sua queda começar a ser visualizada. Sabendo que ao término desses $45\,\mathrm{m}$ ele possui velocidade de $50\,\mathrm{m/s}$, qual era sua velocidade no começo da visualização da queda? Qual foi o tempo em que se visualizou a queda?
10. Sabendo que a aceleração da gravidade na Lua é de $1{,}6\,\mathrm{m/s^2}$. Quanto tempo leva para um objeto que caiu do repouso de uma altura de $20\,\mathrm{m}$ atingir o solo?
11. Sabendo que um objeto que é deixado cair do repouso de uma altura de $49{,}58\,\mathrm{m}$ demora exatos $2\,\mathrm{s}$ para chegar à superfície de Júpiter, qual é o valor da aceleração da gravidade em Júpiter?
12. Quais as características de um movimento de lançamento vertical?
13. O que sabemos sobre o tempo de subida, descida e total em um lançamento vertical?
14. O que sabemos sobre as velocidades do móvel nos mesmos níveis ao subir e descer em um lançamento vertical?

15. O que vai caracterizar o sinal da aceleração no movimento de lançamento vertical?
16. Um corpo é arremessado para cima com velocidade $50\,\mathrm{m/s}$. Qual a altura máxima atingida por este corpo? Qual o tempo de subida e total deste movimento?
17. Qual velocidade inicial deve ser aplicada em um corpo se o intuito é que o mesmo atinja uma altura máxima de $500\,\mathrm{m}$? Qual tempo de voo deste movimento? Qual a velocidade de impacto com o solo?
18. Um corpo arremessado de uma altura $0\,\mathrm{m}$, para cima com velocidade inicial de $396\,\mathrm{km/h}$, atingirá qual altura máxima? Quanto tempo leva até passar pela posição de altura $S = 250\,\mathrm{m}$ e qual sua velocidade ao passar por esta posição? Quanto tempo leva até passar pela posição de altura $S = 450\,\mathrm{m}$ e qual sua velocidade ao passar por esta posição? Qual a velocidade de retorno à posição $0\,\mathrm{m}$? Qual o tempo de voo?
19. Monte o gráfico de posição ao longo do tempo $(S \times t)$ e de velocidade ao longo do tempo $(v \times t)$ do exercício anterior.
20. Um astronauta na Lua resolve arremessar um martelo para cima com velocidade inicial $10\,\mathrm{m/s}$. Considerando a posição de arremesso com $0\,\mathrm{m}$, qual a altura máxima atingida pelo martelo? Qual o tempo de subida, descida e de voo do martelo? Se o astronauta quiser que o martelo atinja uma altura de $100\,\mathrm{m}$ qual deve ser a velocidade inicial aplicada ao martelo? (Dado: $g_{\text{lua}} = 1{,}6\,\mathrm{m/s^2}$)
21. Em um filme de exploração espacial, um astronauta em um planeta do sistema solar faz um arremesso de um corpo para cima com velocidade $50\,\mathrm{m/s}$. O mesmo astronauta, desconsiderando qualquer atrito, calcula que o tempo de voo do objeto até retornar a sua mão foi de $26{,}95\,\mathrm{s}$. Descubra qual a aceleração da gravidade (calcule) neste planeta e qual era o planeta (use o Google). Qual foi a altura máxima atingida por este objeto neste planeta?

5

Lançamentos em Duas Dimensões

O que você vai aprender

- Descrever movimentos compostos e reconhecer quando suas componentes podem ser estudadas separadamente.
- Somar vetorialmente velocidades medidas em referenciais diferentes.
- Determinar tempo de queda, alcance e velocidade em lançamentos horizontais.
- Calcular os tempos, a altura máxima e o alcance de um lançamento oblíquo.

Por que estudamos isto? Ao chutarmos uma bola ou observarmos a água que sai de uma mangueira, vemos trajetórias curvas. Podemos descrever esses lançamentos acompanhando, ao mesmo tempo, o movimento horizontal e o vertical. Neste capítulo vamos reunir o que já estudamos sobre movimento uniforme, queda livre e vetores para entender essas trajetórias.

5.1 Composição vetorial de movimentos

Agora que já estudamos uma ampla gama de movimentos considerando, em sua maioria, características escalares e com um referencial fixo, vamos neste momento evoluir nosso estudo para movimentos mais realistas, ou seja, considerando características vetoriais das grandezas deslocamento e velocidade, bem como supondo que podem ocorrer movimentos de corpos e de referenciais. Como é de se esperar, a matemática envolvendo vetores (Vol. 1) será necessária neste ponto de nosso estudo.

Quando ocorre **superposição de movimentos**, ou seja, quando acompanhamos o movimento de uma partícula ou corpo mas a mesma ocorre devido à movimentação desta somada à movimentação de um ou mais corpos que interagem com a mesma, devemos **somar vetorialmente todos estes movimentos** para saber o deslocamento ou velocidade real desta partícula ou corpo.

Pense neste momento em uma pessoa que caminha sobre um trem. Podemos estudar este movimento da pessoa considerando **o trem como referência**, dessa forma o deslocamento da pessoa ΔS_P sobre o trem é toda informação necessária e podemos inclusive considerar o caráter **escalar** deste deslocamento visto que usamos o trem como um **sistema de coordenadas unidimensional**. A descrição deste movimento pode ser associada à figura 5.1.

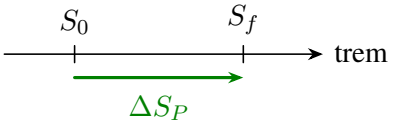


Figura 5.1: Deslocamento da pessoa sobre um trem considerando o trem como referencial.

Mas se tomamos um objeto fora do trem como referencial, como por exemplo uma árvore ao lado dos trilhos, simplesmente considerar o **movimento da pessoa em relação ao trem já não é mais suficiente**, devemos **considerar também o movimento do trem em relação à árvore** para poder determinar corretamente o movimento da pessoa em relação à árvore. Nesta situação a pessoa estará em uma posição inicial (S_0) que terá um deslocamento inicial em relação à árvore (ΔS_0) que chamaremos simplesmente de **vetor posição inicial** $\left(\vec{S}_0\right)$.

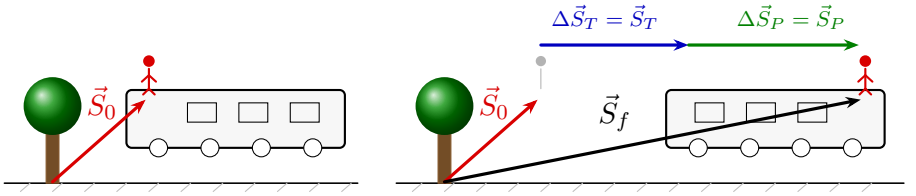


Figura 5.2: Deslocamento da pessoa sobre um trem considerando uma árvore fora do trem como referencial.

Com o passar do tempo o trem irá se deslocar em (ΔS_T), que chamaremos de **vetor trem** $\left(\vec{S}_T\right)$. E da mesma forma a pessoa se desloca sobre o trem em (ΔS_P), que chamaremos de **vetor pessoa** $\left(\vec{S}_P\right)$. Ao final do movimento a pessoa se encontra em uma posição final (S_f), que formará em relação à árvore, um **vetor posição final** $\left(\vec{S}_f\right)$. É fácil perceber que para determinar o **deslocamento da pessoa em relação à árvore** $\left(\Delta\vec{S}_{PA}\right)$ entre o início e o final do movimento, simplesmente devemos determinar a **diferença** entre o **vetor posição inicial** $\left(\vec{S}_0\right)$ e o **vetor posição final** $\left(\vec{S}_f\right)$, logo,

$$\Delta\vec{S}_{PA} = \vec{S}_f - \vec{S}_0 \tag{5.1}$$

No estudo dos lançamentos, vamos usar uma ideia associada a Galileu: o **princípio da independência dos movimentos**. Desprezando a resistência do ar e tomando a gravidade como constante, a queda na vertical não depende da velocidade horizontal. Podemos, então, resolver as equações de cada eixo separadamente. Essa independência vale para o modelo adotado; forças como a resistência do ar podem relacionar as duas componentes.

Pensemos em uma pessoa que lança uma bola para cima dentro de um trem em movimento retilíneo uniforme. Desprezando os efeitos do ar, a bola retorna à sua mão. Para quem está no vagão, ela sobe e desce em linha reta; para quem observa do solo, descreve uma parábola, pois mantém a velocidade horizontal que tinha ao ser lançada. A altura atingida e o tempo de voo são os mesmos nas duas descrições. O que muda é o referencial. Iremos aproveitar essa separação:

aplicamos as equações do movimento uniforme na horizontal e as do movimento uniformemente variado na vertical, usando o mesmo tempo nas duas.

Exemplo 5.1

Durante um intervalo de tempo, um trem avança $4\,\mathrm{m}$ para leste em relação ao solo. No mesmo intervalo, uma pessoa percorre $3\,\mathrm{m}$ em linha reta dentro do vagão. Qual é o deslocamento da pessoa em relação a uma árvore junto aos trilhos se ela caminhar **a**) para leste; **b**) para oeste; **c**) transversalmente ao vagão, para norte?

Dados do problema

$$\Delta\vec{S}_T = 4\,\mathrm{m}\ (\text{leste}), \quad \Delta\vec{S}_P = 3\,\mathrm{m}$$

Somamos o deslocamento do trem em relação ao solo ao da pessoa em relação ao trem:

$$\Delta\vec{S}_{PA} = \Delta\vec{S}_T + \Delta\vec{S}_P.$$

a) Como os deslocamentos apontam para leste, seus módulos se somam:

$$\boxed{\Delta S_{PA} = 4 + 3 = 7\,\mathrm{m} \quad \text{para leste.}}$$

b) Escolhendo leste como sentido positivo, o deslocamento da pessoa no trem é negativo:

$$\boxed{\Delta S_{PA} = 4 - 3 = 1\,\mathrm{m} \quad \text{para leste.}}$$

Embora caminhe para oeste no vagão, a pessoa ainda avança para leste em relação ao solo.

c) Os deslocamentos são perpendiculares. Pelo teorema de Pitágoras,

$$\Delta S_{PA} = \sqrt{(4\,\mathrm{m})^2 + (3\,\mathrm{m})^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta S_{PA} = 5\,\mathrm{m}.}$$

A direção faz um ângulo $\theta = \operatorname{arctg}(3/4) \simeq 36{,}9°$ ao norte do leste. Assim, a pessoa percorre $3\,\mathrm{m}$ no referencial do trem, mas seu deslocamento em relação ao solo tem módulo $5\,\mathrm{m}$. Precisamos sempre indicar em qual referencial estamos trabalhando.

5.2 Velocidade relativa em duas dimensões

No Capítulo 2, calculamos velocidades relativas em uma dimensão. Quando os movimentos têm direções diferentes, mantemos o mesmo raciocínio, mas a operação passa a ser vetorial. A soma dos deslocamentos, dividida pelo mesmo intervalo de tempo, fornece a soma das velocidades médias. A relação também

vale para as velocidades instantâneas, desde que os referenciais não girem um em relação ao outro.

Tomemos um barco atravessando um rio de margens retas e paralelas. O barco tem uma velocidade em relação à água, e a água tem outra em relação às margens. Para descrever o movimento visto da margem, somamos esses dois vetores. Se a correnteza for paralela às margens, sua velocidade não terá componente na direção da travessia.

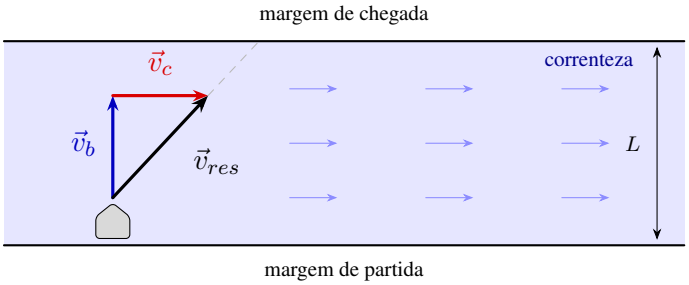


Figura 5.3: Barco atravessando um rio: o motor impulsiona o barco perpendicularmente às margens ($\vec{v}_b$), a correnteza o arrasta rio abaixo ($\vec{v}_c$) e o observador parado na margem vê o barco se mover na diagonal ($\vec{v}_{res}$).

Na figura 5.3, o barco mantém sua velocidade em relação à água perpendicular às margens. Enquanto atravessa, a correnteza o leva rio abaixo. Por isso ele chega a um ponto deslocado em relação àquele que fica diretamente em frente à partida. Se as duas velocidades permanecerem constantes, a trajetória observada da margem será uma reta diagonal.

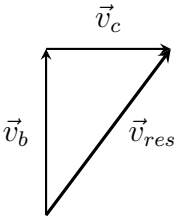
Primeiramente, identificamos os vetores: $\vec{v}_b$ é a velocidade do barco em relação à água; $\vec{v}_c$, a velocidade da água em relação às margens; e $\vec{v}_{res}$, a velocidade do barco em relação às margens. Neste caso, os dois primeiros vetores são perpendiculares. Assim, $v_{res} = \sqrt{v_b^2 + v_c^2}$. A direção da resultante é dada pela diagonal do paralelogramo formado por eles.

> A velocidade de um corpo em relação ao solo é a soma vetorial da sua velocidade em relação ao meio com a velocidade do meio em relação ao solo:
> $$\vec{v}_{res} = \vec{v}_{corpo} + \vec{v}_{meio}.$$

Ao resolver esses problemas, começamos identificando o referencial de cada velocidade e desenhando os vetores. Depois calculamos as componentes em cada eixo. No barco da figura, a largura do rio e v_b determinam o tempo de travessia; durante esse mesmo tempo, a correnteza produz o deslocamento rio abaixo. Se o barco apontar contra a correnteza para chegar diretamente em frente, teremos de decompor $\vec{v}_b$ novamente: sua componente de travessia será menor.

Exemplo 5.2

Um barco mantém velocidade de $4\,\mathrm{m/s}$ em relação à água, perpendicular às margens de um rio com $60\,\mathrm{m}$ de largura. A água escoa paralelamente às margens a $3\,\mathrm{m/s}$. Admitindo velocidades constantes, determine o tempo de travessia, o deslocamento rio abaixo e a velocidade do barco em relação às margens.



Dados do problema

$$L = 60\,\mathrm{m}, \quad v_b = 4\,\mathrm{m/s}\ (\perp \text{ à margem}), \quad v_c = 3\,\mathrm{m/s}\ (\parallel \text{ à margem})$$

A velocidade perpendicular às margens é v_b. Dividimos a largura do rio por essa componente para encontrar o tempo:

$$t = \frac{L}{v_b} = \frac{60\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{m/s}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 15\,\mathrm{s}}$$

Nesse intervalo, o deslocamento produzido pela correnteza vale

$$d = v_c \cdot t = 3\,\mathrm{m/s} \cdot 15\,\mathrm{s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = 45\,\mathrm{m}}$$

Para obter o módulo da velocidade em relação às margens, usamos as componentes perpendiculares:

$$v_{res} = \sqrt{v_b^2 + v_c^2} = \sqrt{(4\,\mathrm{m/s})^2 + (3\,\mathrm{m/s})^2} = \sqrt{25\,\mathrm{m^2/s^2}}$$

$$\boxed{v_{res} = 5\,\mathrm{m/s}}$$

A direção da resultante faz $\operatorname{arctg}(3/4) \simeq 36{,}9^\circ$ com a perpendicular às margens, no sentido da correnteza.

Exemplo 5.3

Um avião mantém velocidade de $120\,\mathrm{km/h}$ para norte em relação ao ar. Um vento constante leva o ar para leste a $50\,\mathrm{km/h}$. Qual é o módulo da velocidade do avião em relação ao solo?

Dados do problema

$$v_a = 120\,\mathrm{km/h}\ \text{(para o norte)}, \quad v_v = 50\,\mathrm{km/h}\ \text{(para o leste)}$$

As velocidades do avião em relação ao ar e do ar em relação ao solo são perpendiculares. Somamos os vetores e calculamos o módulo da resultante:

$$v_{res} = \sqrt{v_a^2 + v_v^2} = \sqrt{(120\,\mathrm{km/h})^2 + (50\,\mathrm{km/h})^2}$$
$$v_{res} = \sqrt{14.400\,\mathrm{km^2/h^2} + 2500\,\mathrm{km^2/h^2}} = \sqrt{16.900\,\mathrm{km^2/h^2}}$$

$$\boxed{v_{res} = 130\,\mathrm{km/h}}$$

Encontramos $130\,\mathrm{km/h}$ em relação ao solo, enquanto a velocidade em relação ao ar continua sendo $120\,\mathrm{km/h}$. O movimento visto do solo faz $\mathrm{arctg}\,(50/120) \simeq 22{,}6°$ a leste do norte. Para seguir exatamente para norte em relação ao solo, o piloto teria de orientar o avião um pouco contra o vento.

5.3 Lançamento horizontal

Já sendo conhecido o movimento uniformemente variado que ocorre na vertical, devido à influência da aceleração da gravidade, podemos conhecer nossa primeira forma de **movimento bidimensional**. Um movimento bidimensional é aquele que ocorre simultaneamente em duas dimensões. No caso, teremos um movimento ocorrendo ao mesmo tempo nos eixos **horizontal** e **vertical**. Como já conhecemos o **sistema de coordenadas cartesiano** (x, y), usaremos as propriedades de direção e sentido deste sistema para a nomenclatura que utilizaremos em movimentos bidimensionais. Isso significa que trataremos a parte **horizontal** do movimento como estando ocorrendo no **eixo** (x) ao passo que a parte **vertical** do movimento estará ocorrendo no **eixo** (y).

Especificamente no lançamento horizontal, consideramos haver **aceleração somente no eixo vertical** (y) devido à aceleração da gravidade. Logo, na **vertical** teremos um **movimento uniformemente variado**. Enquanto que na **horizontal não** iremos considerar haver **aceleração**. Nem para propulsão do móvel $(a > 0)$, por exemplo. Nem para frenagem do móvel $(a < 0)$, como quando considerarmos haver alguma força de atrito ou arrasto do ar[1]. Desta forma, teremos um **movimento uniforme** ocorrendo na **horizontal**.

Atente que o movimento é **um** só. Um único objeto sendo lançado **de modo**

[1] No estudo da dinâmica do movimento serão apresentadas as definições de força atrito e força de arrasto.

horizontal e sofrendo ação da aceleração da gravidade. Contudo, **por simplificação**, dividimos a análise deste movimento em **duas partes**. Isso ocorre pois se estudarmos o movimento de maneira única, teremos a inclusão da **velocidade** com sua característica **vetorial**. Como o estudo de vetores dificulta o entendimento matemático, buscamos alternativas que possam explicar corretamente o movimento, sem a necessidade da aplicação da matemática vetorial. Por isso, até este momento, a simples divisão de um movimento em duas partes é possível.

Observe a figura 5.4. Iremos desconsiderar qualquer rotação sofrida pela bala do canhão. Obrigatoriamente temos que considerar o canhão **sem nenhuma inclinação** em relação ao eixo (x), ou seja, em relação à horizontal. Caso houvesse alguma inclinação teríamos um lançamento oblíquo, que estudaremos a seguir, e não um lançamento horizontal.

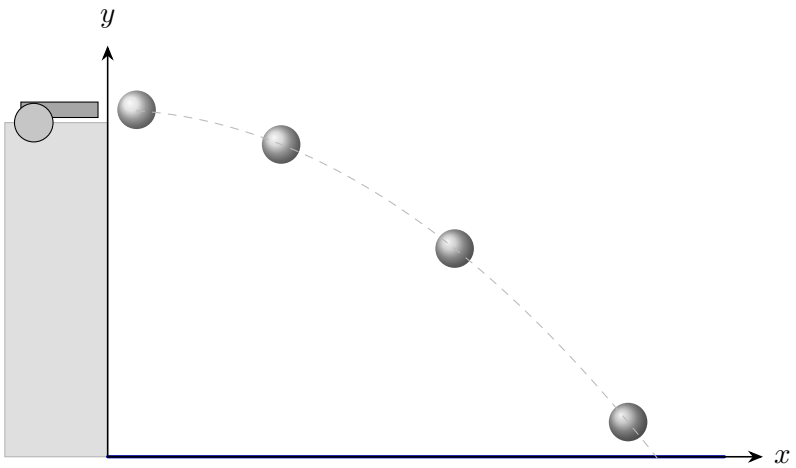


Figura 5.4: Lançamento horizontal de uma bala de canhão de uma altura h.

Ao efetuar o disparo o canhão emite o projétil com **velocidade inicial** (v_0) considerada sendo totalmente **horizontal** (v_x) maior que zero. Para ter início o lançamento horizontal é **primordial** haver uma velocidade inicial.

$$v_x > 0$$

Sendo o movimento no eixo (x) do tipo **uniforme**, o valor dessa velocidade horizontal **não se alterará** ao longo do tempo.

Na direção (y) a bala inicia seu movimento do repouso, ou seja, com **velocidade vertical inicial** nula

$$v_{0y} = 0$$

Contudo, por se tratar de um **movimento uniformemente variado** na vertical, ao longo do tempo o valor da **velocidade vertical** irá mudar. Tomando como sendo o eixo (y) orientado para cima, com o passar do tempo a velocidade vertical **aumentará em módulo** mas com **sinal negativo** $v_y < 0$. O entendimento desta relação é essencial para compreender o lançamento horizontal.

Ao acompanhar o movimento que ocorre na horizontal, temos que o **tempo** do movimento nesta direção é determinado exclusivamente pelo **tempo de queda** (t) do projétil. Esse tempo é dado desde a partida até o momento de toque com o solo. Ou seja, é o tempo total do movimento. Esse é um valor comum que usamos tanto no movimento horizontal quanto no vertical. Assim, o **deslocamento horizontal** (Δx), também **chamado de alcance**, será dado por 2.1

$$\Delta S = v \cdot t$$

$$\boxed{\Delta x = v_x \cdot t} \tag{5.2}$$

Ao passo que, aplicando as equações horárias do movimento uniformemente variado e a equação de Torricelli 3.1, 3.2, 3.3,

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ S &= S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta S \end{aligned}$$

para a **componente vertical** (y) do movimento,

$$\begin{aligned} v_y &= v_{0y} + at \\ y &= y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_y^2 &= v_{0y}^2 + 2a\Delta y \end{aligned}$$

lembrando que se o eixo (y) é direcionado para cima temos $(a = -g)$

$$
\begin{aligned}
v_y &= v_{0y} - gt \\
y &= y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\
v_y^2 &= v_{0y}^2 - 2g\Delta y
\end{aligned}
$$

partindo do repouso no eixo vertical $v_{0y} = 0$, temos

$$\boxed{v_y = -gt} \tag{5.3}$$

$$\boxed{y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2} \tag{5.4}$$

$$\boxed{v_y^2 = -2g\,(y - y_0)} \tag{5.5}$$

Considerando que a posição de partida (y_0) é a altura (h) de início da queda $(y_0 = h)$ e que o contato com o solo (y) ocorre na posição de origem do sistema de coordenadas para o eixo (y), temos $(y = 0)$. Assim, as equações 5.4 e 5.5 ficam

$$
\begin{aligned}
0 &= h - \frac{1}{2}gt^2 \\
h &= \frac{1}{2}gt^2
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
v_y^2 &= -2g\Delta y \\
v_y^2 &= -2g\,(0 - h) \\
v_y^2 &= 2gh
\end{aligned}
$$

que são as mesmas relações para o **movimento de queda livre**. Observando o diagrama 5.5 vemos exatamente essa situação. A queda analisada no **eixo** (y) ocorre do mesmo modo que o visto na figura 4.3 para o **movimento de queda livre**. Ou seja, à medida que o tempo passa há um **maior deslocamento no eixo** (y) e **aumento** do módulo da **velocidade vertical** (v_y). Contudo, podemos observar claramente que na direção **horizontal**, onde o **movimento** é **uniforme**, o **deslocamento** ocorre com **valores iguais em tempos iguais**. A **velocidade horizontal** (v_x) **não altera** seu valor com o passar do tempo.

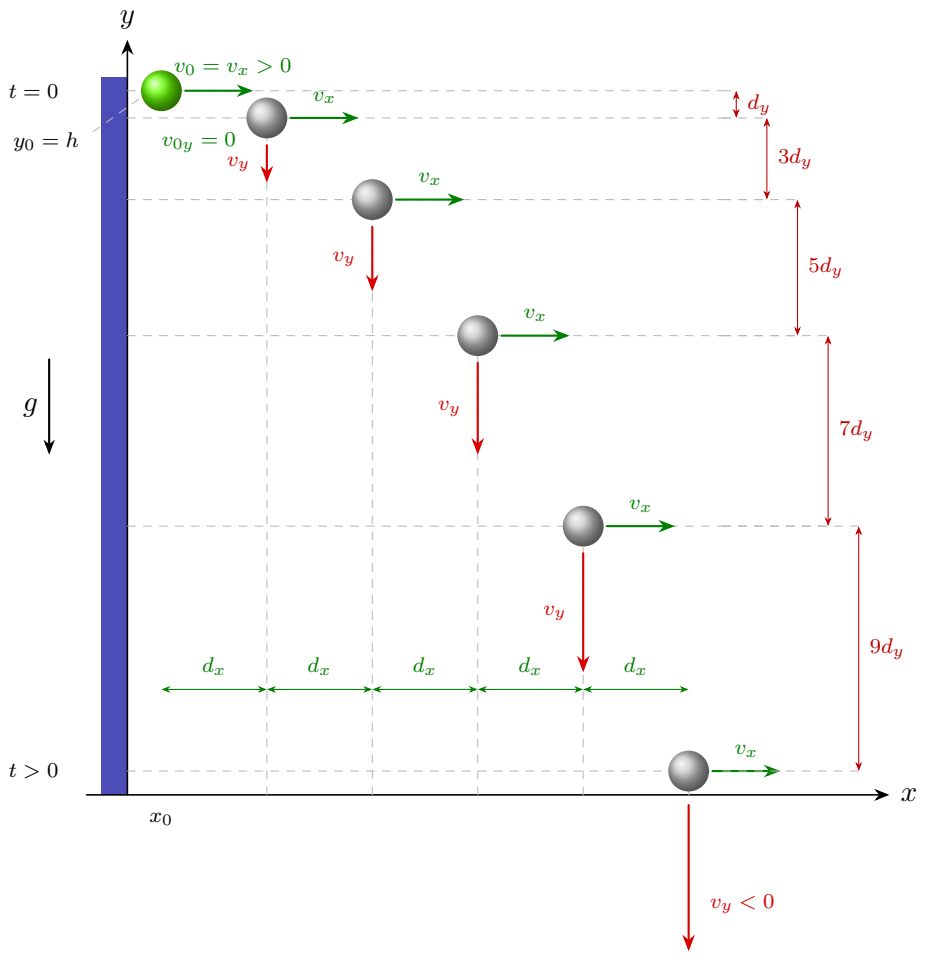


Figura 5.5: Diagrama para o lançamento horizontal no eixo de coordenadas (x) em verde e (y) em vermelho.

Exemplo 5.4

Qual o tempo de movimento até o contato com o solo para um lançamento horizontal com velocidade inicial $v_0 = 50\,\mathrm{m/s}$ que parte de uma altura de $500\,\mathrm{m}$? Determine qual deslocamento ocorre na horizontal (alcance).

Dados do problema

$$
\begin{aligned}
t &= ? \\
v_x &= v_0 = 50\,\mathrm{m/s} \\
v_{0y} &= 0\,\mathrm{m/s} \\
y_f &= 0\,\mathrm{m} \\
y_0 &= h = 500\,\mathrm{m} \\
\Delta x &= ?
\end{aligned}
$$

Calculando na vertical

Usando a equação horária da posição para o movimento de queda livre que ocorre na vertical, temos

$$\begin{aligned} S &= S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ y &= y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \\ 0 &= h + 0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\ h &= \frac{1}{2} g t^2 \\ 500\,\cancel{\text{m}} &= \frac{1}{2} \cdot 10\,\cancel{\text{m}}/\text{s}^2 \cdot t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 500 &= \frac{5}{\text{s}^2} t^2 \\ \frac{500\,\text{s}^2}{5} &= t^2 \\ t &= \sqrt{100\,\text{s}^2} \end{aligned}$$

Logo, o tempo de queda deste movimento é de

$$\boxed{t = 10\,\text{s}}$$

Calculando na horizontal

Sabendo o tempo de duração do movimento, basta aplicar a equação 5.2. Assim, temos

$$\begin{aligned} \Delta S &= v \cdot t \\ \Delta x &= v_x \cdot t \\ \Delta x &= 50\,\text{m}/\cancel{\text{s}} \cdot 10\cancel{\text{s}} \end{aligned}$$

Logo, o alcance horizontal é

$$\boxed{\Delta x = 500\,\text{m}}$$

Exemplo 5.5

De que altura parte um projétil ejetado em lançamento horizontal, que após $12\,\mathrm{s}$ atinge o solo, com a componente horizontal de sua velocidade sendo $15\,\mathrm{m/s}$? Qual foi o alcance deste projétil?

Dados do problema

$$\begin{aligned} y_0 = h &= ? \\ t &= 12\,\mathrm{s} \\ y_f &= 0\,\mathrm{m} \\ v_x = v_0 &= 15\,\mathrm{m/s} \\ v_{0y} &= 0\,\mathrm{m/s} \\ \Delta x &= ? \end{aligned}$$

Calculando na vertical

Usando a equação horária da posição para o movimento de queda livre que ocorre na vertical, temos

$$\begin{aligned} S &= S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ y &= y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \\ 0 &= h + 0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\ h &= \frac{1}{2} g t^2 \\ h &= \frac{1}{2} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot (12\,\mathrm{s})^2 \\ h &= 5\,\mathrm{m/\cancel{s^2}} \cdot 144\cancel{s^2} \end{aligned}$$

Logo, a altura de queda deste movimento é de

$$\boxed{h = 720\,\mathrm{m}}$$

Calculando na horizontal

Sabendo o tempo de duração do movimento, basta aplicar a equação 5.2. Assim, temos

$$\Delta S = v \cdot t$$

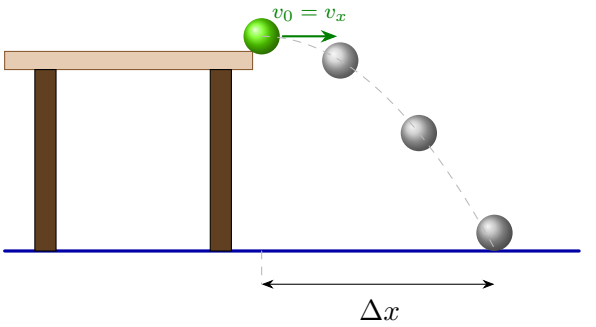
$$\Delta x = v_x \cdot t$$
$$\Delta x = 15\,\mathrm{m/\cancel{s}} \cdot 12\cancel{s}$$

Logo, o alcance horizontal é

$$\boxed{\Delta x = 180\,\mathrm{m}}$$

Exemplo 5.6

Uma formiga lança uma bola que ao perder contato com a mesa possui velocidade de $2\,\mathrm{m/s}$. Sabendo que a altura da mesa é de $1{,}2\,\mathrm{m}$, a que distância da mesa a bola toca o solo? Qual a velocidade vertical final da bola?



Dados do problema

$$v_x = v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$$
$$y_0 = h = 1{,}2\,\mathrm{m}$$
$$y_f = 0\,\mathrm{m}$$
$$\Delta x = ?$$
$$v_{0y} = 0\,\mathrm{m/s}$$
$$v_y\,(y = 0\,\mathrm{m}) = ?$$

Para saber qual a distância horizontal que a bola percorre, precisamos descobrir antes qual o tempo de queda. Dessa forma:

Calculando na vertical

Usando a equação horária da posição para o movimento de queda livre que

ocorre na vertical, temos

$$
\begin{aligned}
S &= S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\
y &= y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \\
0 &= h + 0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\
h &= \frac{1}{2} g t^2 \\
1{,}2 \cancel{\text{m}} &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cancel{\text{m}}/\text{s}^2 \cdot t^2 \\
1{,}2 &= \frac{5}{\text{s}^2} t^2 \\
\frac{1{,}2\,\text{s}^2}{5} &= t^2 \\
t &= \sqrt{0{,}24\,\text{s}^2} \\
t &\simeq 0{,}49\,\text{s}
\end{aligned}
$$

Calculando na horizontal

Sabendo o tempo de duração do movimento, basta aplicar a equação 5.2. Assim, temos

$$
\begin{aligned}
\Delta S &= v \cdot t \\
\Delta x &= v_x \cdot t \\
\Delta x &= 2\,\text{m}/\cancel{\text{s}} \cdot 0{,}49 \cancel{\text{s}}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\Delta x = 0{,}98\,\text{m}}$$

Para descobrir a velocidade vertical final usamos a equação horária da velocidade 5.3.

$$
\begin{aligned}
v &= v_0 + at \\
v_y &= v_{0y} - gt \\
v_y &= -gt \\
v_y &= 0 - 10\,\text{m}/\cancel{\text{s}^2} \cdot 0{,}49 \cancel{\text{s}}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{v_y = -4{,}9\,\mathrm{m/s}}$$

5.4 Lançamento oblíquo

Assim como vimos para o movimento de lançamento horizontal, para o **lançamento oblíquo** haverá também a necessidade de **dividir** um mesmo movimento em suas componentes **horizontal** (x) e **vertical** (y). A diferença para o lançamento horizontal é que neste movimento **há uma angulação da velocidade inicial** em relação à horizontal. Isso significa dizer que teremos, além de uma **velocidade horizontal inicial** diferente de zero $(v_{0x} > 0)$, também uma **velocidade vertical inicial** diferente de zero $(v_{0y} \neq 0)$. O movimento será então uma parábola de subida e posterior descida, para o caso de a angulação ser acima do eixo horizontal, como visto na figura 5.6. E de uma semiparábola para baixo, parecida com a ocorrida no lançamento horizontal, para o caso de uma inclinação da velocidade inicial para baixo do eixo horizontal, como visto na figura 5.7.

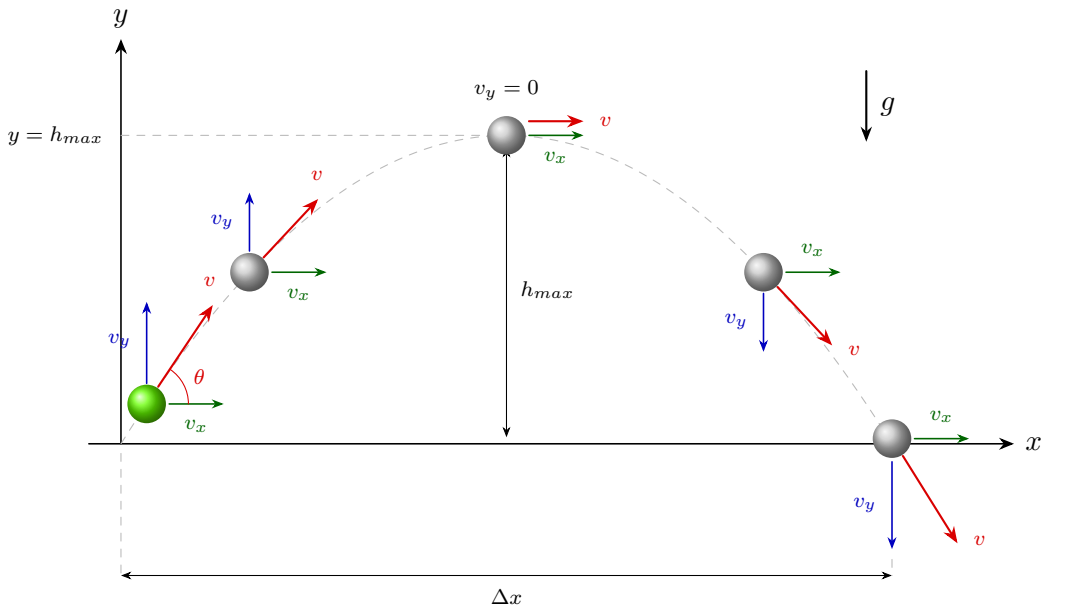


Figura 5.6: Lançamento oblíquo com ângulo (θ) direcionado para cima em relação ao eixo horizontal.

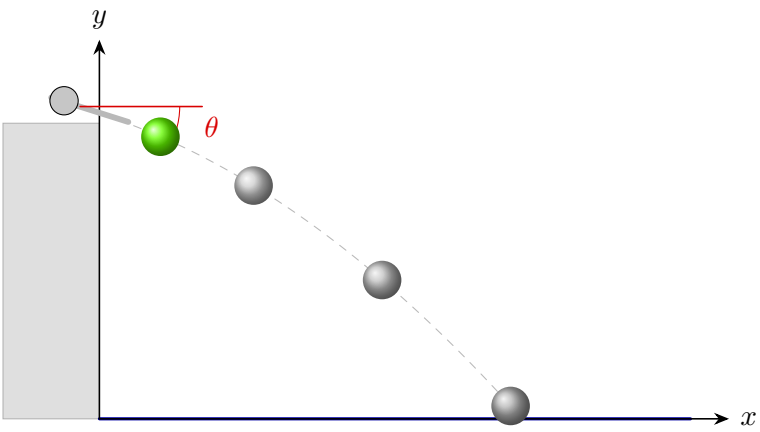


Figura 5.7: Lançamento oblíquo com ângulo (θ) direcionado para baixo em relação ao eixo horizontal.

Na figura 5.6 vemos um lançamento oblíquo com ângulo $(\theta > 0)$ (ângulo para cima) em relação à horizontal. Nesta situação o projétil parte com velocidade inicial $(v_0 > 0)$ que possui componentes horizontal $(v_{0x} > 0)$ e vertical $(v_{0y} > 0)$. A **componente horizontal** descreverá, da mesma forma que no lançamento horizontal, um **movimento uniforme**. Logo, **não há mudança** da velocidade em (x), ou seja, $(v_x = v_{0x})$. Já a **componente vertical** descreverá um lançamento vertical para cima. Ou seja, um **movimento uniformemente variado** com **velocidade inicial** para cima $(v_{0y} > 0)$ e posterior diminuição da velocidade, por ação da aceleração da gravidade, até a mesma ser anulada $(v_y = 0)$ na altura máxima $(y = h_{\max})$. Após atingir a altura máxima, o projétil sofre inversão no sentido de sua componente vertical da velocidade $(v_y < 0)$ e começa a ser acelerado, pela ação da gravidade, para baixo. Ao atingir o solo, após um tempo total (t_T), o movimento se encerra. Perceba que o **tempo do movimento na horizontal** é o mesmo tempo total (t_T). É importante relembrar que, assim como no movimento de lançamento vertical, se o móvel partir e retornar ao mesmo nível (y) ao final do movimento, o tempo de subida (t_s) é exatamente igual ao tempo de descida (t_d). Nesta situação o tempo total é também dado por 4.12. Mas com a velocidade inicial (v_0) sendo v_{0y}. Assim

$$\boxed{t_T = \frac{2v_{0y}}{g}} \tag{5.6}$$

da mesma forma

$$\boxed{t_s = t_d = \frac{v_{0y}}{g}} \tag{5.7}$$

No caso de o ângulo ser $(\theta < 0)$ (ângulo para baixo) em relação à horizon-

tal, teremos novamente um **movimento uniforme** ocorrendo na **horizontal**. Mas agora, haverá **movimento de queda** com **velocidade inicial**, em módulo, maior que zero na **vertical**. Ou seja, temos uma situação próxima do lançamento horizontal mas com a diferença de a velocidade inicial em (y) não ser nula $(v_{0y} \neq 0)$ neste movimento.

De modo resumido, seguimos aplicando a equação do movimento uniforme 2.1 para a componente horizontal do movimento e as equações 3.1, 3.2 e 3.3 para a componente vertical do movimento.

Por representar uma maior complexidade e ser uma situação mais geral, nos atentaremos a partir de agora na situação da figura 5.6. Assim, visualizando o diagrama 5.8 devemos notar algumas características deste movimento. Por ser um **movimento uniforme na horizontal**, podemos ver na figura que a **velocidade** em (x) (representada na cor verde) não muda. E do ponto de início do movimento no eixo horizontal (x_0) até o ponto final da trajetória (x) temos o **alcance** (Δx).

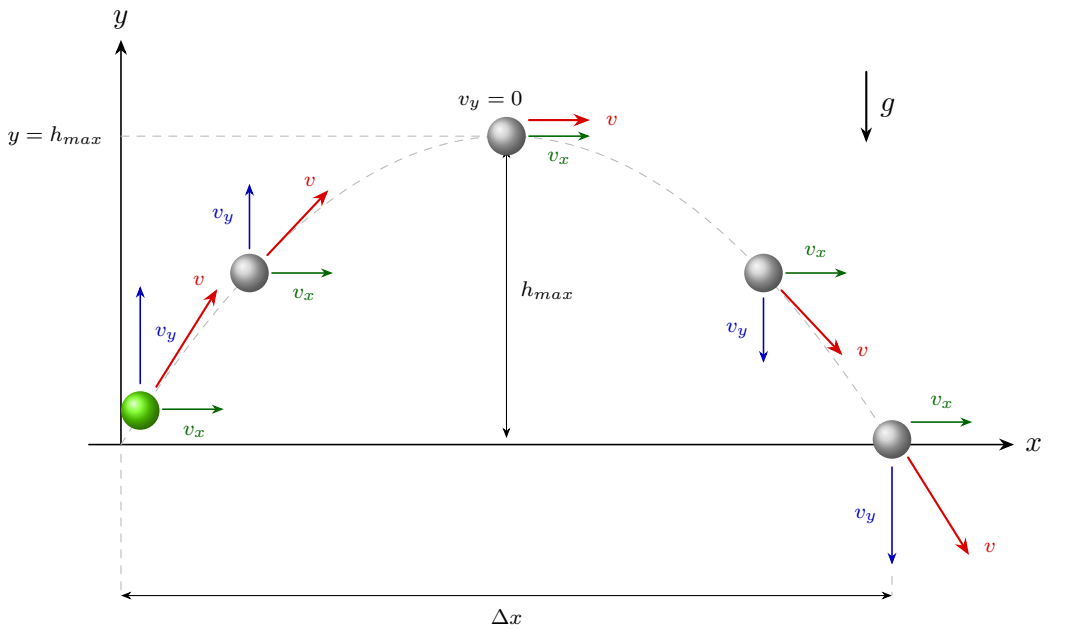


Figura 5.8: Diagrama com velocidade (v) do projétil (vermelho), componente horizontal da velocidade (v_x) (verde), componente vertical da velocidade (v_y) (azul), altura máxima $(y = h_{\max})$ e alcance (Δx).

Já em relação ao movimento na vertical algumas características são de vital importância para o seu entendimento. A velocidade inicial na vertical (representada em azul) é máxima $(v_{0y} > 0)$ no início do movimento e vai diminuindo à medida que o corpo se aproxima da altura máxima $(y = h_{\max})$. O ponto de **altura máxima** é importante na descrição deste movimento. Nele, a componente **vertical** da velocidade se anula $(v_y = 0)$, inverte seu sentido $(v_y < 0)$, e o projétil começa a

cair aumentando o valor da velocidade vertical em módulo (no caso do diagrama com sinal negativo) até atingir o solo.

É importante saber diferenciar as **componentes da velocidade** $(v_x$ e $v_y)$ da velocidade (v) (representada em vermelho) do corpo. A velocidade (v) em **momento nenhum se anula**. O que ocorre é que na altura máxima ela **perde** por completo **sua componente vertical** e se torna **exatamente igual** à sua componente **horizontal** $(v = v_x)$. À medida que começa a cair novamente, a componente vertical volta a aumentar em módulo, fazendo com que a velocidade do corpo (v) vá constantemente alterando sua direção e sentido. Note que é devido à **constante alteração**, desde o início do movimento, na **direção** e **sentido** da **velocidade** (v) que analisamos esse lançamento único do projétil em duas partes (horizontal e vertical).

Sempre que o projétil retornar para **o mesmo nível** do qual partiu, sua componente **horizontal** da velocidade será **exatamente igual** a do início do movimento $v_{0x} = v_x$ e sua componente **vertical** terá exatamente o **mesmo módulo**, mas **sentido oposto** $\vec{v}_{0y} = -\vec{v}_y$. Ocasionando que a velocidade (v) de contato com o solo seja **a mesma em módulo** $|\vec{v}_0| = |\vec{v}|$ do lançamento mas com **direção e sentido diferentes**.

Ainda analisando as relações entre as componentes da velocidade, devemos relembrar nossos estudos a respeito da **decomposição de vetores** para estipular os valores das velocidades vertical (v_y) e horizontal (v_x) em função da velocidade (v) e do ângulo em relação à horizontal (θ). Observando a figura 5.9 podemos relembrar que a **velocidade horizontal** será dada por $v_x = v \cdot \cos\theta$ e a **velocidade vertical** $v_y = v \cdot \operatorname{sen}\theta$.

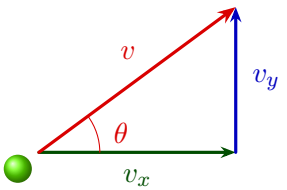


Figura 5.9: Componentes **horizontal** (v_x) e **vertical** (v_y) da velocidade (v) que possui angulação θ em relação à horizontal.

Assim, levando em conta que no momento do lançamento a velocidade será a **inicial** (v_0), temos

$$\boxed{v_{0x} = v_0 \cdot \cos\theta} \tag{5.8}$$

$$\boxed{v_{0y} = v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta} \tag{5.9}$$

Da relação 5.8, da equação para o movimento uniforme 2.1 e lembrando que na horizontal $v_x = v_{0x}$, podemos escrever:

$$\Delta S = v \cdot t$$
$$\Delta x = v_x \cdot t$$

$$\boxed{\Delta x = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t} \tag{5.10}$$

Usando 5.9 na equação horária da velocidade para o MUV 3.1, temos

$$v = v_0 + at$$
$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$\boxed{v_y = v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta - gt} \tag{5.11}$$

Considerando o nível de partida sendo zero $(y_0 = 0)$ e usando 5.9 na equação horária da posição do MUV 3.2, temos

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$y = 0 + v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\boxed{y = v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2} \tag{5.12}$$

Em relação aos tempos do movimento, podemos reescrever as equações 5.6 e 5.7, usando 5.9, da seguinte forma

$$\boxed{t_T = \frac{2v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta}{g}} \tag{5.13}$$

$$\boxed{t_s = t_d = \frac{v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta}{g}} \tag{5.14}$$

Sendo a **altura máxima** $(y = h_{\text{max}})$ um ponto de interesse, temos, usando a equação para o tempo de subida 5.14 na equação 5.12

$$
\begin{aligned}
S &= S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\
y &= y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \\
y &= 0 + v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\
y &= v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \\
h_{\text{max}} &= v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot t_s - \frac{1}{2} g t_s^2 \\
h_{\text{max}} &= v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \left(\frac{v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta}{g} \right) - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta}{g} \right)^2 \\
h_{\text{max}} &= \frac{(v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta)^2}{g} - \frac{g \cdot (v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta)^2}{2g^2} \\
h_{\text{max}} &= \frac{2\,(v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta)^2}{2g} - \frac{(v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta)^2}{2g} \\
h_{\text{max}} &= \frac{2\,(v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta)^2 - (v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta)^2}{2g}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{h_{\text{max}} = \frac{(v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta)^2}{2g}} \tag{5.15}
$$

Usando a equação para o tempo total 5.13 do movimento na equação o **alcance** 5.10, temos

$$
\begin{aligned}
\Delta S &= v \cdot t \\
\Delta x &= v_x \cdot t \\
\Delta x &= v_0 \cdot \cos\theta \cdot t_T \\
\Delta x &= v_0 \cdot \cos\theta \cdot \frac{2 v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta}{g} \\
\Delta x &= \frac{v_0^2 \cdot (2 \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta)}{g}
\end{aligned}
$$

Lembrando da seguinte relação trigonométrica $[(2 \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta) = \operatorname{sen} 2\theta]$, temos que a **equação para o alcance** fica:

$$\boxed{\Delta x = \frac{v_0^2 \cdot \operatorname{sen} 2\theta}{g}} \tag{5.16}$$

Observando a equação 5.16 fica claro que o **alcance máximo** (Δx_{max}) depende do ângulo (θ) de arremesso do projétil. Sabendo que o **valor máximo possível** para a **função seno** (sen) é **um**. E que isso só ocorre quando o ângulo é de $(90°)$. Sabemos que devemos ter $(2\theta = 90°)$, ou seja, $(\theta = 45°)$ para ter alcance máximo possível. Assim, teremos

$$\Delta x_{\text{max}} = \frac{v_0^2 \cdot \operatorname{sen} 2\theta}{g}$$

$$\Delta x_{\text{max}} = \frac{v_0^2 \cdot \operatorname{sen}\,(2 \cdot 45°)}{g}$$

$$\Delta x_{\text{max}} = \frac{v_0^2 \cdot \overbrace{\operatorname{sen} 90°}^{=1}}{g}$$

$$\boxed{\Delta x_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{g}} \tag{5.17}$$

O **maior alcance** para um arremesso com velocidade inicial (v_0), **desde que o lançamento parta e termine no mesmo nível**, **sempre será** o realizado com **ângulo** de $(45°)$. Para ângulos maiores que $(\theta > 45°)$ o projétil subirá mais alto mas cairá mais próximo do ponto de lançamento[2]. Para ângulos menores que $(\theta < 45°)$ o projétil se movimentará de modo mais veloz na horizontal, mas por subir menos, tocará o solo mais rapidamente e com isso mais próximo do ponto de arremesso.

Ângulos de arremesso que **diferem do mesmo valor** em **relação a** $(45°)$ têm o **mesmo** ponto de **contato com o solo**. Logo, o **alcance é igual** quando os ângulos de lançamentos possuem a **mesma diferença** em **relação a** $(45°)$. Por exemplo, para lançamentos com ângulo de $(\theta = 75°)$, que difere em $(75° - 45° = 30°)$, e com ângulo de $(\theta = 15°)$, que também difere em $(45° - 15° = 30°)$, o ponto de contato com o solo é o mesmo. Essa lógica vale para $(60°)$ e $(30°)$, $(85°)$ e $(5°)$ e todas as demais combinações que possuam a mesma diferença em relação a $(45°)$. Esse efeito pode ser visto na figura 5.10.

[2]Obviamente que para a mesma velocidade inicial (v_0) a maior altura será atingida no caso de o lançamento ser feito com ângulo de $(90°)$ (lançamento vertical)

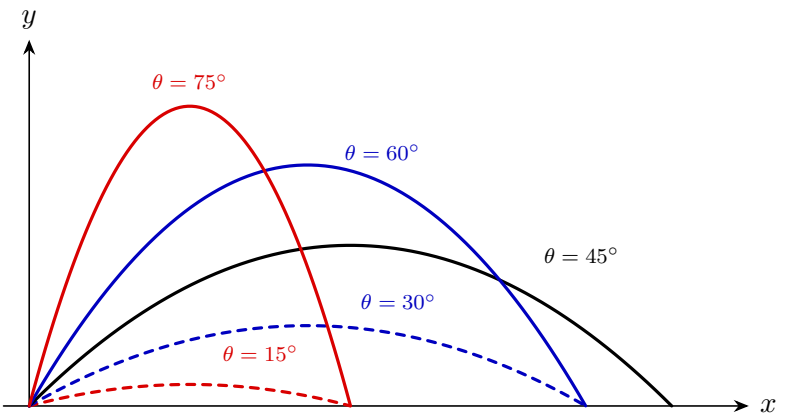


Figura 5.10: Gráfico mostrando que, para lançamentos que partem e terminam no mesmo nível, o alcance máximo é atingido com ângulo de $(\theta = 45°)$. Nas situações em que a diferença em relação a $(\theta = 45°)$ é a mesma, o ponto de contato com o solo também é o mesmo. Lançamentos com ângulos acima de $(\theta = 45°)$ atingem alturas máximas maiores.

Exemplo 5.7

Qual o tempo de movimento até o retorno do contato com o solo para um lançamento oblíquo de velocidade inicial $10\,\mathrm{m/s}$ e ângulo em relação à horizontal $30°$? Determine qual a altura máxima e o deslocamento horizontal (alcance).

Dados do problema

$$\begin{aligned} t_T &= ? \\ y_0 &= 0\,\mathrm{m} \\ v_0 &= 10\,\mathrm{m/s} \\ \theta &= 30° \\ v_{0y} &= ? \\ v_x &= ? \\ \Delta x &= ? \\ y &= h_{\max}? \end{aligned}$$

Primeiro devemos decompor a velocidade inicial (v_0) em suas componentes horizontal (v_{0x}) e vertical (v_{0y}). Usando 5.8 e 5.9, temos

$$\begin{aligned} v_{0x} &= v_0 \cdot \cos\theta \\ v_{0x} &= 10\,\mathrm{m/s} \cdot \cos 30° \\ v_{0x} &= 10\,\mathrm{m/s} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Sendo $v_x = v_{0x}$

$$\boxed{v_x \simeq 8{,}66\,\mathrm{m/s}}$$

$$\begin{aligned} v_{0y} &= v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta \\ v_{0y} &= 10\,\mathrm{m/s} \cdot \operatorname{sen} 30^\circ \\ v_{0y} &= 10\,\mathrm{m/s} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_{0y} = 5\,\mathrm{m/s}}$$

Calculando na vertical

Na altura máxima sabemos que a velocidade vertical se anula ($v_y = 0\,\mathrm{m/s}$). Assim, aplicando a equação horária da velocidade 3.1, temos o tempo até a altura máxima. Ou seja, o tempo de subida

$$\begin{aligned} v &= v_0 + at \\ v_y &= v_{0y} - gt \\ 0 &= 5\,\mathrm{m/s} - 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot t_s \\ 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot t_s &= 5\,\mathrm{m/s} \\ t_s &= \frac{5\,\mathrm{s}}{10} \\ t_s &= 0{,}5\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Logo, sabendo que o nível de início do movimento é o mesmo do término, temos que o tempo total será o dobro do tempo de subida ($t_T = 2 \cdot t_s$). Assim

$$\boxed{t_T = 1\,\mathrm{s}}$$

Esse mesmo resultado seria encontrado se fossem usadas as equações 5.14 ou 5.13. Sabendo os tempos do movimento podemos usar a equação horária da posição 3.2 para descobrir a altura máxima. Neste caso, usamos o tempo de subida (t_s).

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$
$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$h_{\max} = 0 + 5\,\mathrm{m/\cancel{s}} \cdot 0{,}5\cancel{s} - \frac{1}{2} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot (0{,}5\,\mathrm{s})^2$$
$$h_{\max} = 2{,}5\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m/\cancel{s}^2} \cdot 0{,}25\cancel{s}^2$$
$$h_{\max} = 2{,}5\,\mathrm{m} - 1{,}25\,\mathrm{m}$$

$$\boxed{h_{\max} = 1{,}25\,\mathrm{m}}$$

O mesmo resultado seria encontrado ao usar as equações 5.12 ou 5.15.

Calculando na horizontal

Aplicando a equação horária da posição para o movimento uniforme 2.1, podemos calcular o alcance:

$$\Delta S = v \cdot t$$
$$\Delta x = v_x \cdot t_T$$
$$\Delta x = 8{,}66\,\mathrm{m/\cancel{s}} \cdot 1\cancel{s}$$

$$\boxed{\Delta x = 8{,}66\,\mathrm{m}}$$

Exemplo 5.8

Um projétil é lançado obliquamente de uma altura de $50\,\mathrm{m}$ e ângulo, para baixo da linha do horizonte, de $60°$ com velocidade inicial de $40\,\mathrm{m/s}$. Qual o tempo até o contato com o solo e qual o alcance deste projétil?

Dados do problema

$$y_0 = h = 50\,\mathrm{m}$$
$$\theta = 60°$$
$$v_0 = 40\,\mathrm{m/s}$$
$$y_f = 0\,\mathrm{m}$$
$$v_{0y} = ?$$

$$v_x = ?$$
$$t_d = ?$$
$$\Delta x = ?$$

Primeiro devemos decompor a velocidade inicial (v_0) em suas componentes horizontal (v_{0x}) e vertical (v_{0y}). Usando 5.8 e 5.9, temos

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\theta$$
$$v_{0x} = 40\,\mathrm{m/s} \cdot \cos 60^\circ$$
$$v_{0x} = 40\,\mathrm{m/s} \cdot \frac{1}{2}$$

Sendo $v_x = v_{0x}$, temos

$$\boxed{v_x = 20\,\mathrm{m/s}}$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta$$
$$v_{0y} = 40\,\mathrm{m/s} \cdot \operatorname{sen} 60^\circ$$
$$v_{0y} = 40\,\mathrm{m/s} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Devemos prestar atenção que, sendo o lançamento para baixo, teremos uma velocidade vertical inicial negativa $(v_{0y} < 0)$.

$$\boxed{v_{0y} \simeq -34{,}64\,\mathrm{m/s}}$$

Calculando na vertical

Devemos calcular o tempo de descida (t_d) da altura inicial $(y_0 = h)$ até o solo $(y_f = 0)$. Assim, aplicando a equação horária da posição 3.2, temos

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$
$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$0 = 50\,\mathrm{m} - 34{,}64\,\mathrm{m/s} \cdot t_d - \frac{1}{2} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot t_d^2$$
$$0 = 50\,\mathrm{m} - 34{,}64 t_d \mathrm{m/s} - 5t_d^2 \mathrm{m/s^2}$$
$$5t_d^2 \mathrm{m/s^2} + 34{,}64 t_d \mathrm{m/s} - 50\,\mathrm{m} = 0$$

Temos então uma equação de segundo grau (Vol. 1) que deve ser resolvida por Bhaskara (Vol. 1) onde $A = 5\,\mathrm{m/s^2}$, $B = 34{,}64\,\mathrm{m/s}$ e $C = -50\,\mathrm{m}$ e $x = t_d$.

$$x' \text{ e } x'' = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

$$t'_d \text{ e } t''_d = \frac{-34{,}64\,\mathrm{m/s} \pm \sqrt{(34{,}64\,\mathrm{m/s})^2 - 4 \cdot (5\,\mathrm{m/s^2}) \cdot (-50\,\mathrm{m})}}{2 \cdot (5\,\mathrm{m/s^2})}$$

$$t'_d \text{ e } t''_d = \frac{-34{,}64\,\mathrm{m/s} \pm \sqrt{1200\,\mathrm{m^2/s^2} + 1000\,\mathrm{m^2/s^2}}}{10\,\mathrm{m/s^2}}$$

$$t'_d \text{ e } t''_d = \frac{-34{,}64\,\mathrm{m/s} \pm \sqrt{2200\,\mathrm{m^2/s^2}}}{10\,\mathrm{m/s^2}}$$

$$t'_d \text{ e } t''_d = \frac{-34{,}64\,\mathrm{m/s} \pm 46{,}9\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{m/s^2}}$$

Assim

$$t'_d = \frac{-34{,}64\,\mathrm{m/s} + 46{,}9\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{m/s^2}}$$

$$t'_d = \frac{12{,}26\,\cancel{\mathrm{m}}/\cancel{\mathrm{s}}}{10\,\cancel{\mathrm{m}}/\mathrm{s}^{\cancel{2}}}$$

$$t'_d = 1{,}226\,\mathrm{s}$$

e

$$t''_d = \frac{-34{,}64\,\mathrm{m/s} - 46{,}9\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{m/s^2}}$$

$$t''_d = \frac{-81{,}54\,\cancel{\mathrm{m}}/\cancel{\mathrm{s}}}{10\,\cancel{\mathrm{m}}/\mathrm{s}^{\cancel{2}}}$$

$$t''_d = -8{,}154\,\mathrm{s}$$

Sabendo que o tempo negativo não nos interessa por ser referente ao passado. Usamos como tempo de descida do movimento

$$\boxed{t_d \simeq 1{,}226\,\mathrm{s}}$$

Calculando na horizontal

Aplicando a equação horária da posição para o movimento uniforme 2.1, podemos calcular o alcance:

$$\begin{aligned}\Delta S &= v \cdot t\\ \Delta x &= v_x \cdot t_d\\ \Delta x &= 20\,\mathrm{m/\cancel{s}} \cdot 1{,}226\cancel{\mathrm{s}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta x = 24{,}52\,\mathrm{m}}$$

Observe que as equações 5.14, 5.15 e 5.16 não são válidas nesta situação. Por isso é interessante sempre saber usar as equações básicas 2.1, 3.1, 3.2 e 3.3. As equações derivadas somente são úteis em casos específicos. Ajudam para o cálculo ser feito mais rapidamente mas em contrapartida são muitas e válidas somente em situações restritas.

Exemplo 5.9

Sabendo que o ângulo de lançamento é de $30°$, qual a velocidade inicial para que um lançamento oblíquo, que parte do solo e termina no solo, atinja uma altura de $125\,\mathrm{m}$ e alcance de $866\,\mathrm{m}$?

Dados do problema

$$\begin{aligned}v_0 &= ?\\ \theta &= 30°\\ y_0 &= 0\,\mathrm{m}\\ y_f &= 0\,\mathrm{m}\\ h_{\text{max}} &= 125\,\mathrm{m}\\ \Delta x &= 866\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

Sabemos o alcance e a altura máxima. O que sabemos haver em comum nestas duas relações é o tempo de movimento. Para o alcance temos o tempo total (t_T) e para a altura máxima o tempo de subida (t_s). Sendo $t_s = \frac{t_T}{2}$. Assim, podemos usar as duas relações e criar um sistema de equações para determinar

o valor da velocidade inicial (v_0).

Calculando na horizontal

Aplicando a equação horária da posição para o movimento uniforme 2.1, temos:

$$\begin{aligned}
\Delta S &= v \cdot t \\
\Delta x &= v_x \cdot t_T \\
866\,\mathrm{m} &= v_x \cdot 2t_s \\
t_s &= \frac{866\,\mathrm{m}}{2v_x} \\
t_s &= \frac{433\,\mathrm{m}}{v_x}
\end{aligned}$$

Lembrando de 5.8 e que $(v_x = v_{0x})$ temos

$$\begin{aligned}
v_{0x} &= v_0 \cdot \cos\theta \\
v_{0x} &= v_0 \cdot \cos 30^\circ \\
v_{0x} &= v_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
t_s &= \frac{433\,\mathrm{m}}{v_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \\
t_s &= \frac{433\,\mathrm{m}}{0{,}866 \cdot v_0}
\end{aligned}$$

$$\boxed{t_s = \frac{500\,\mathrm{m}}{v_0}}$$

Calculando na vertical

Aplicando a equação horária da posição para o movimento uniformemente variado 3.2 e lembrando de 5.9, temos:

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$
$$125\,\mathrm{m} = 0 + v_0 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ \cdot t_s - \frac{1}{2} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot t_s^2$$
$$125\,\mathrm{m} = v_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot t_s - 5\,\mathrm{m/s^2} \cdot t_s^2$$

Sabendo que $t_s = \frac{500\,\mathrm{m}}{v_0}$, temos

$$125\,\mathrm{m} = v_0 \cdot \frac{1}{2} \cdot t_s - 5\,\mathrm{m/s^2} \cdot t_s^2$$
$$125\,\mathrm{m} = \cancel{v_0} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{500\,\mathrm{m}}{\cancel{v_0}}\right) - 5\,\mathrm{m/s^2} \cdot \left(\frac{500\,\mathrm{m}}{v_0}\right)^2$$
$$125\,\mathrm{m} = 250\,\mathrm{m} - 5\,\mathrm{m/s^2} \cdot \frac{250.000\,\mathrm{m^2}}{v_0^2}$$
$$\frac{1.250.000\,\mathrm{m^3/s^2}}{v_0^2} = 125\,\mathrm{m}$$
$$\frac{1.250.000\,\mathrm{m}^{\cancel{3}\,2}/\mathrm{s^2}}{125\cancel{\mathrm{m}}} = v_0^2$$
$$10.000\,\mathrm{m^2/s^2} = v_0^2$$
$$v_0 = \sqrt{10.000\,\mathrm{m^2/s^2}}$$

Logo, sendo um lançamento para cima, a velocidade inicial deve ser

$$\boxed{v_0 = 100\,\mathrm{m/s}}$$

Exemplo 5.10

Sabendo que $20\,\mathrm{s}$ após ser lançado obliquamente do solo, um projétil retoma o contato com o solo tendo velocidade vertical de $100\,\mathrm{m/s}$ e tendo se movimentado $1600\,\mathrm{m}$ na horizontal. Qual a velocidade e ângulo inicial de lançamento do projétil?

Dados do problema

$$t_T = 20\,\mathrm{s}$$
$$y_0 = 0\,\mathrm{m}$$

$$
\begin{aligned}
y_f &= 0\,\mathrm{m} \\
v_{fy} &= 100\,\mathrm{m/s} \\
\Delta x &= 1600\,\mathrm{m} \\
v_0 &= ? \\
\theta &= ?
\end{aligned}
$$

Sabendo o alcance e o tempo total (t_T), podemos calcular a velocidade horizontal.

Calculando na horizontal

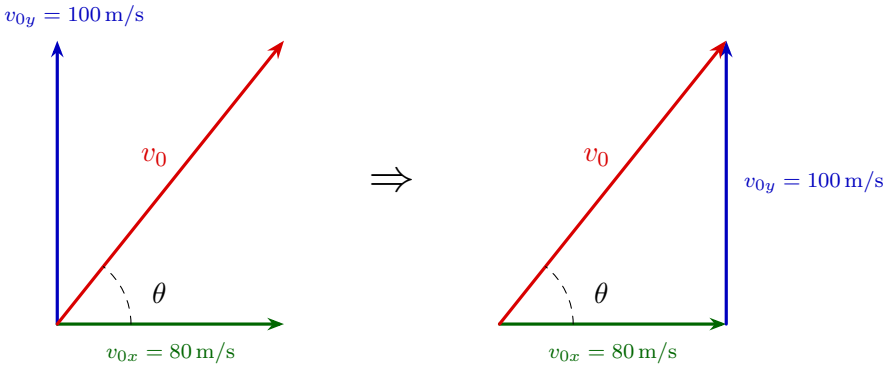
Aplicando a equação horária da posição para o movimento uniforme 2.1, temos:

$$
\begin{aligned}
\Delta S &= v \cdot t \\
\Delta x &= v_x \cdot t_T \\
1600\,\mathrm{m} &= v_x \cdot 20\,\mathrm{s} \\
v_x &= \frac{1600\,\mathrm{m}}{20\,\mathrm{s}}
\end{aligned}
$$

Lembrando que $(v_x = v_{0x})$ temos

$$\boxed{v_{0x} = 80\,\mathrm{m/s}}$$

Sabendo que a **velocidade final na vertical** é idêntica em **módulo** com a **velocidade inicial na vertical** $(\vec{v}_{0y} = -\vec{v}_{fy} \rightarrow |v_{0y}| = |v_{fy}|)$, para as situações em que o nível inicial e final do movimento são iguais. Sendo, obviamente, a velocidade final vertical para baixo e a inicial para cima, temos



Podemos calcular o valor da **velocidade inicial** (v_0) usando o teorema de Pi-

tágoras (Vol. 1).

$$\begin{aligned} h^2 &= x^2 + y^2 \\ v_0^2 &= v_{0x}^2 + v_{0y}^2 \\ v_0^2 &= (80\,\mathrm{m/s})^2 + (100\,\mathrm{m/s})^2 \\ v_0^2 &= 6400\,\mathrm{m^2/s^2} + 10.000\,\mathrm{m^2/s^2} \\ v_0^2 &= 16.400\,\mathrm{m^2/s^2} \\ v_0 &= \sqrt{16.400\,\mathrm{m^2/s^2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{v_0 \simeq 128{,}06\,\mathrm{m/s}}$$

Para o ângulo, podemos usar as funções seno, cosseno ou tangente, para após descobrir sua função inversa arcsen, arccos ou arctg. Aqui será usada a função seno (Vol. 1).

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{y}{h} \\ \operatorname{sen}\theta &= \frac{100\,\cancel{\mathrm{m/s}}}{128{,}06\,\cancel{\mathrm{m/s}}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta \simeq 0{,}781}$$

Calculando a função inversa (Vol. 1), temos

$$\begin{aligned} \operatorname{arcsen} n &= \theta \\ \operatorname{arcsen} 0{,}781 &= \theta \end{aligned}$$

$$\boxed{\theta \simeq 51{,}34^\circ}$$

Síntese do capítulo

Nos lançamentos sem resistência do ar e com gravidade constante, resolvemos as componentes do movimento usando o mesmo tempo. A horizontal é um **MU**; a vertical, um **MUV** com $a_y = -g$. No lançamento horizontal, $v_{0y} = 0$; no oblíquo, $v_{0x} = v_0 \cos\theta$ e $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta$. A igualdade entre os tempos de subida e descida exige retorno ao nível de partida. Para relacionar velocidades medidas em referenciais que não giram entre si, usamos a soma vetorial, como nos exemplos do barco e do avião.

Lista de exercícios 5

1. O que afirma o princípio da independência dos movimentos? Dê um exemplo do cotidiano.
2. Um barco atravessa um rio de $80\,\mathrm{m}$ de largura apontando o motor perpendicularmente à margem, com velocidade de $5\,\mathrm{m/s}$ em relação à água. Sabendo que a correnteza tem velocidade de $3\,\mathrm{m/s}$, determine o tempo de travessia, a distância que o barco é arrastado rio abaixo e a sua velocidade resultante em relação às margens.
3. Um avião voa apontando o nariz para o norte com velocidade de $160\,\mathrm{km/h}$ em relação ao ar, enquanto sopra um vento de $120\,\mathrm{km/h}$ para o leste. Qual o módulo da velocidade resultante do avião em relação ao solo?
4. Quais as características de um movimento de lançamento horizontal?
5. Qual a relação entre o tempo de movimento na direção horizontal e o tempo de queda?
6. O que sabemos sobre as velocidades horizontal e vertical do móvel no início do lançamento?
7. Qual o alcance de um móvel que é arremessado em lançamento horizontal de cima de um prédio de $20\,\mathrm{m}$ com velocidade inicial de $30\,\mathrm{m/s}$?
8. Qual o tempo de queda e deslocamento horizontal de um projétil lançado horizontalmente, de uma altura de $15\,\mathrm{m}$, com velocidade de $200\,\mathrm{m/s}$?
9. Qual a velocidade final horizontal e vertical de uma pedra lançada em movimento horizontal, de cima de uma montanha de $2\,\mathrm{km}$, com velocidade inicial de $72\,\mathrm{km/h}$?
10. Uma bomba é solta por um avião que se movimenta com velocidade horizontal de $900\,\mathrm{km/h}$. Sabendo que a bomba é solta quando o avião está a uma altitude de $10\,\mathrm{km}$, qual o deslocamento horizontal da bomba desde o momento de lançamento até o contato com o solo? Qual a velocidade vertical de impacto com o solo?
11. Considerando o nível do solo como sendo $(y = 0\,\mathrm{m})$, qual o tempo de queda e deslocamento horizontal de uma pedra arremessada horizontalmente com velocidade $18\,\mathrm{km/h}$, de cima de uma casa de $4\,\mathrm{m}$ de altura em relação ao solo, sabendo que esta pedra caiu em um buraco de $2\,\mathrm{m}$ de profundidade?
12. Um avião se movimentando horizontalmente pretende acertar um alvo com uma bomba. Sabendo que no momento em que a bomba será deixada cair do avião o alvo se encontra a uma distância horizontal de $8\,\mathrm{km}$ e que a altitude do avião será de $11\,\mathrm{km}$, qual deve ser a velocidade do avião para acertar o alvo?
13. Sabendo que um corpo é lançado obliquamente com angulação de $30°$ com a horizontal e velocidade de $60\,\mathrm{m/s}$, determine as componentes horizontais

e verticais da velocidade.

14. Sabendo que um corpo é lançado obliquamente com angulação de $45°$ com a horizontal e velocidade de $144\,\mathrm{km/h}$, determine as componentes horizontais e verticais da velocidade.
15. Sabendo que um corpo é lançado obliquamente com angulação de $60°$ com a horizontal e velocidade de $500\,\mathrm{cm/s}$, determine as componentes horizontais e verticais da velocidade.
16. Sabendo que um corpo é lançado obliquamente com angulação de $90°$ com a horizontal e velocidade de $12\,\mathrm{m/s}$, determine as componentes horizontais e verticais da velocidade.
17. Sabendo que um corpo é lançado obliquamente com angulação de $300°$ com a horizontal e velocidade de $50\,\mathrm{m/s}$, determine as componentes horizontais e verticais da velocidade.
18. Qual o tempo de subida até a altura máxima de um corpo arremessado com angulação de $55°$ com a horizontal e velocidade de $200\,\mathrm{m/s}$?
19. Qual a altura máxima atingida por um corpo arremessado com angulação de $40°$ com a horizontal e velocidade de $20\,\mathrm{m/s}$?
20. Qual o tempo total de movimento de um corpo arremessado com angulação de $25°$ com a horizontal e velocidade de $1500\,\mathrm{m/s}$ até retornar ao mesmo nível em que foi arremessado?
21. Qual o alcance de um corpo arremessado com angulação de $65°$ com a horizontal e velocidade de $500\,\mathrm{m/s}$?
22. Sabendo que um corpo é lançado em movimento oblíquo com angulação de $58°$ com a horizontal e velocidade de $1200\,\mathrm{km/h}$, determine o tempo de subida até a altura máxima, a altura máxima atingida, o tempo total de movimento e o alcance do corpo.
23. Um projétil lançado obliquamente do nível do solo tem um alcance de $300\,\mathrm{m}$ em $10\,\mathrm{s}$ de movimento. Determine a velocidade inicial e o ângulo de lançamento.
24. Um corpo é arremessado do alto de um prédio de $80\,\mathrm{m}$ com uma angulação de $60°$ com a horizontal. Sabendo que a velocidade de lançamento do corpo é de $150\,\mathrm{m/s}$, determine a altura máxima, o tempo de subida até a altura máxima, o tempo de descida até o nível do solo, a distância horizontal do prédio que o corpo terá ao tocar o solo e o vetor velocidade final ao fazer contato com o solo.
25. Um jogador de basquete deseja arremessar uma bola de uma altura de $2{,}3\,\mathrm{m}$ para acertar a cesta que se encontra a $3{,}05\,\mathrm{m}$ de altura. Sabendo que o jogador se encontra a $6{,}75\,\mathrm{m}$ da cesta, determine a velocidade com que a bola deve ser arremessada, sabendo que o ângulo de arremesso foi de $45°$.

6

Movimento Circular Uniforme

O que você vai aprender

- Identificar a componente da aceleração que muda a direção da velocidade em uma curva.
- Descrever rotações usando ângulo, velocidade angular, período e frequência.
- Converter medidas angulares e aplicar a relação $v = \omega R$.
- Determinar o módulo e a direção da aceleração centrípeta no MCU.
- Relacionar as velocidades em polias, engrenagens e peças solidárias ao mesmo eixo.

Por que estudamos isto? Ao observarmos uma roda ou um ponteiro de relógio, podemos acompanhar quanto ele gira e quanto cada ponto percorre. Vamos relacionar essas duas descrições e entender por que um corpo que faz uma curva está acelerado, mesmo quando sua rapidez permanece constante.

6.1 Aceleração em trajetórias curvas

No lançamento oblíquo, a trajetória é curva e a direção da velocidade muda ao longo do movimento. Iremos retomar essa observação. Como a velocidade é um vetor, uma mudança de direção já representa uma variação da velocidade. Portanto, um carro pode manter a mesma leitura no velocímetro e ainda assim estar acelerado enquanto faz uma curva.

Podemos decompor a aceleração em duas componentes. A **tangencial**, $\vec{a}_t$, atua ao longo da tangente à trajetória e altera o módulo da velocidade. A **normal**, $\vec{a}_c$, é perpendicular à velocidade e altera sua direção. Em uma circunferência, ela aponta para o centro e recebe o nome de **aceleração centrípeta**. Em uma curva qualquer, aponta para o centro de curvatura, isto é, o centro da circunferência que melhor acompanha a curva naquele ponto.

Quando um carro entra em uma curva, nosso corpo tende, por inércia, a manter o movimento em linha reta. O banco e o cinto exercem forças que nos fazem acompanhar a curva, acelerando-nos para o seu interior. Se o carro também aumentar ou diminuir a rapidez, haverá uma componente tangencial da aceleração. Se a rapidez ficar constante, essa componente será nula. Vamos estudar as forças envolvidas mais adiante, na dinâmica.

Começaremos pelo **movimento circular uniforme**, ou MCU: a trajetória é uma circunferência e o módulo da velocidade permanece constante. Nesse caso, a aceleração é inteiramente centrípeta. No Capítulo 7, estudaremos o movimento circular com variação da rapidez.

Neste ponto de nossos estudos iremos começar a investigar movimentos que

se repetem, também conhecidos como movimentos em ciclos. Estudar este tipo de movimento é de grande utilidade visto que muitos movimentos na mecânica clássica são periódicos, ou seja, se repetem ao longo do tempo. O movimento em ciclo de mais simples descrição é o **movimento circular uniforme**. Nesta etapa estudaremos então a **cinemática da rotação**. Ainda não consideraremos as características que geram este tipo de movimento, isso será feito a seguir no estudo da dinâmica. Mas estenderemos agora nossos conhecimentos e uniremos com novas grandezas físicas para descrever mais um tipo de movimento considerando suas características cinemáticas.

6.2 Grandezas angulares: arco, ângulo e radiano

É importante relembrar algumas características de um círculo. Podemos descrever o deslocamento em um movimento circular em função da **angulação** $\Delta\theta$, percorrida ao longo do círculo, ou do **arco de circunferência** ΔS ao longo de seu **perímetro**. Conforme já sabemos, ao percorrer uma volta inteira em um círculo, em termos de angulação, percorremos uma variação angular $\Delta\theta = 360°$. Este mesmo valor de $360°$ pode ser expresso em termos do número irracional conhecido como **pi**, com o valor 2π sendo referente a uma volta completa. Sendo assim, na forma de ângulo o valor de **pi** será

$$\boxed{\pi = 180°} \tag{6.1}$$

Mas o valor de π pode ser também expresso em termos de outra forma de medida que não em ângulos. Essa outra forma é chamada de valor em **radianos**. O número **pi** é irracional: o que muda de uma forma de medida para a outra é apenas o valor da meia-volta, que em graus vale exatamente $180°$ e em radianos vale π, um número que somente pode ser aproximado, visto que não possui uma forma finita de ser representado. Podemos aproximar o valor de **pi** com muitas casas após a vírgula

$$\pi \simeq 3{,}14159\,26535\,89793\,23846\,26433\,83279\,50288 \\ 41971\,69399\,37510\,58209\,74944\,59230\,78164\ldots$$

ou com poucas

$$\boxed{\pi \simeq 3{,}14} \tag{6.2}$$

Quanto maior for a exatidão necessária em um cálculo maior será o número de casas decimais usadas ao se expressar o valor de **pi**. Em nossos estudos, uma aproximação com duas casas decimais será o suficiente, por isso, iremos representar este número na forma vista em 6.2. Assim, temos agora uma maneira de relacionar

valores em ângulos com valores em radianos.

Por exemplo,

$$\begin{aligned}
360^\circ &= 2\pi \simeq 2 \cdot 3{,}14 \simeq 6{,}28\,\text{rad} \\
180^\circ &= \pi \simeq 1 \cdot 3{,}14 \simeq 3{,}14\,\text{rad} \\
90^\circ &= \frac{\pi}{2} \simeq \frac{3{,}14}{2} \simeq 1{,}57\,\text{rad} \\
60^\circ &= \frac{\pi}{3} \simeq \frac{3{,}14}{3} \simeq 1{,}05\,\text{rad} \\
45^\circ &= \frac{\pi}{4} \simeq \frac{3{,}14}{4} \simeq 0{,}78\,\text{rad} \\
30^\circ &= \frac{\pi}{6} \simeq \frac{3{,}14}{6} \simeq 0{,}52\,\text{rad}
\end{aligned}$$

Essa correlação entre ângulo e radianos pode ser feita para quaisquer ângulos.

Exemplo 6.1

Transforme os valores de ângulo 720°, 120°, 78° e 12° para radianos.

Usando inicialmente uma regra de três simples

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{x} &= \frac{180^\circ}{720^\circ} \\
\frac{720^\circ}{180^\circ}\pi &= x \\
4\pi &= x \\
4 \cdot 3{,}14 &= x \\
\boxed{x \simeq 12{,}56}
\end{aligned}$$

Usando inicialmente uma regra de três simples

$$\begin{aligned}
\frac{\pi}{x} &= \frac{180^\circ}{120^\circ} \\
\frac{120^\circ}{180^\circ}\pi &= x \\
0{,}67\pi &= x \\
0{,}67 \cdot 3{,}14 &= x \\
\boxed{x \simeq 2{,}1}
\end{aligned}$$

Usando inicialmente uma regra de três simples

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{x} &= \frac{180^\circ}{78^\circ}\\ \frac{78^\circ}{180^\circ}\pi &= x\\ 0{,}4333\pi &= x\\ 0{,}4333 \cdot 3{,}14 &= x\\ \boxed{x \simeq 1{,}36}\end{aligned}$$

Usando inicialmente uma regra de três simples

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{x} &= \frac{180^\circ}{12^\circ}\\ \frac{12^\circ}{180^\circ}\pi &= x\\ 0{,}0667\pi &= x\\ 0{,}0667 \cdot 3{,}14 &= x\\ \boxed{x \simeq 0{,}21}\end{aligned}$$

Exemplo 6.2

Transforme os valores em radianos $17{,}45$, $4{,}71$, $1{,}4$ e $0{,}12$ para ângulo.

Usando inicialmente uma regra de três simples

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{17{,}45} &= \frac{180^\circ}{x}\\ x &= \frac{17{,}45}{\pi} \cdot 180^\circ\\ x &= \frac{17{,}45}{3{,}14} \cdot 180^\circ\\ x &\simeq 5{,}56 \cdot 180^\circ\\ \boxed{x &\simeq 1000^\circ}\end{aligned}$$

Usando inicialmente uma regra de três simples

$$\frac{\pi}{4{,}71} = \frac{180^\circ}{x}$$
$$x = \frac{4{,}71}{\pi} \cdot 180^\circ$$
$$x = \frac{4{,}71}{3{,}14} \cdot 180^\circ$$
$$x = 1{,}5 \cdot 180^\circ$$
$$\boxed{x = 270^\circ}$$

Usando inicialmente uma regra de três simples

$$\frac{\pi}{1{,}4} = \frac{180^\circ}{x}$$
$$x = \frac{1{,}4}{\pi} \cdot 180^\circ$$
$$x = \frac{1{,}4}{3{,}14} \cdot 180^\circ$$
$$x \simeq 0{,}4459 \cdot 180^\circ$$
$$\boxed{x \simeq 80^\circ}$$

Usando inicialmente uma regra de três simples

$$\frac{\pi}{0{,}12} = \frac{180^\circ}{x}$$
$$x = \frac{0{,}12}{\pi} \cdot 180^\circ$$
$$x = \frac{0{,}12}{3{,}14} \cdot 180^\circ$$
$$x \simeq 0{,}038 \cdot 180^\circ$$
$$\boxed{x \simeq 7^\circ}$$

Observando a figura 6.1 podemos ver que analisando em termos da angulação, uma volta completa é dada pelo valor da **variação angular**[1] $\Delta\theta = 360^\circ = 2\pi$. Na mesma figura podemos ver que analisando uma volta completa podemos determinar um deslocamento ΔS, que nada mais é do que o **perímetro da circunferên-**

[1]Nesta situação usamos o valor de π medido em termos de ângulo, ou seja, $\pi = 180^\circ$.

cia[2] dado por $\Delta S = 2\pi R$, onde R é o **raio da circunferência**.

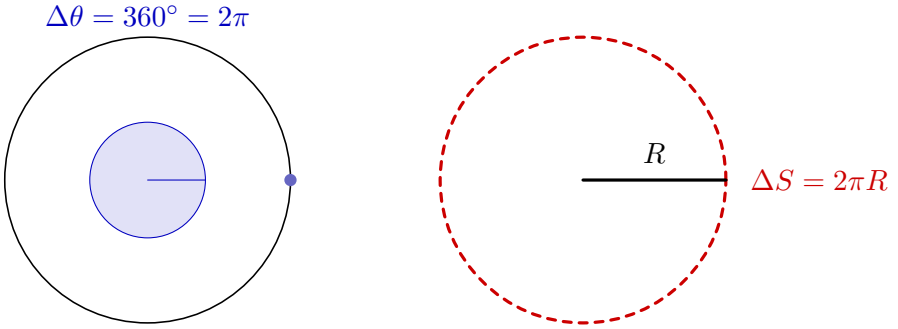


Figura 6.1: Medida de uma volta completa em termos da variação angular $\Delta\theta$ e do deslocamento no perímetro ΔS.

Contudo, nem todo movimento circular será dado em voltas completas. Podemos ter um movimento parcial ao longo da trajetória circular. Desta forma é importante saber relacionar uma variação angular menor que $360°$ com um deslocamento menor que $2\pi R$.

Na figura 6.2 podemos ver na parte superior um movimento referente a metade de uma volta. Partindo de um ângulo θ_0 até um ângulo θ teremos uma variação angular $\Delta\theta = 180° = \pi$. O que equivale a um **arco de circunferência**, ou seja, um deslocamento sobre a borda da circunferência, que é metade do perímetro $\Delta S = \frac{2\pi R}{2} = \pi R = \Delta\theta \cdot R$.

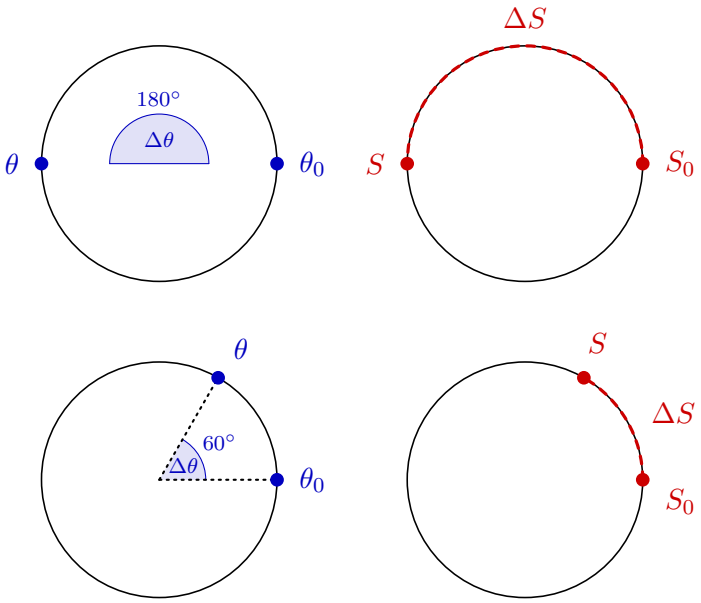


Figura 6.2: Representação, na parte superior, de metade de uma volta completa em termos da variação angular $\Delta\theta$ e do arco de circunferência ΔS, e, na parte inferior, de um sexto de uma volta completa em termos do deslocamento angular $\Delta\theta$ e do arco de circunferência ΔS.

[2]Nesta situação usamos o valor de π medido em termos de radianos, ou seja, $\pi = 3{,}14$.

Na parte inferior da figura 6.2 podemos ver um movimento parcial sobre a circunferência que equivale a uma fração ainda menor de uma volta, mais especificamente uma variação angular $\Delta\theta = 60° = \frac{\pi}{3}$. O valor da proporção entre esse deslocamento angular e uma volta completa pode ser obtido simplesmente dividindo a variação angular em questão pela variação angular de uma volta completa, ou seja, $\frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$. Seguindo este raciocínio, em termos do deslocamento sobre a borda da circunferência, temos que o arco de circunferência descrito neste movimento será de $1/6$ do perímetro, ou seja, de valor $\Delta S = \frac{2\pi R}{6} = \frac{\pi}{3} \cdot R = \Delta\theta \cdot R$.

Expandindo esse raciocínio podemos relacionar qualquer **variação angular** $(\Delta\theta)$ com um **arco de circunferência** (ΔS) equivalente, através da equação

$$\boxed{\Delta S = \Delta\theta \cdot R} \tag{6.3}$$

A utilidade da equação 6.3 será correlacionar um **arco de circunferência**, que nada mais é do que um **deslocamento** (ΔS) sobre o perímetro, em metros, com uma variação angular $(\Delta\theta)$ em uma circunferência de raio R.

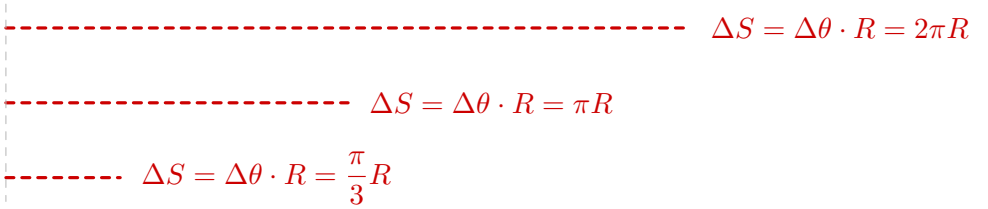


Figura 6.3: Representação retilínea do segmento de arco de circunferência ΔS para três distintas angulações.

> Na equação 6.3, o valor da variação angular deve sempre ser usado em **RADIANOS**,
> ou seja, em termos de π, e nunca com seu valor medido em ângulos.

Perceba que não há diferença em termos escalares entre um deslocamento (ΔS) sobre a borda de uma circunferência e um deslocamento sobre um sistema de coordenadas retilíneas, como pode ser visto na figura 6.3. Por isso, podemos considerar o **arco de circunferência** (ΔS) como equivalente ao **deslocamento** (ΔS) estudado anteriormente.

6.3 Velocidade angular média e velocidade escalar média

Sabendo agora que podemos estruturar nossos estudos do movimento em ciclos sobre um círculo em termos da **variação angular** $(\Delta\theta)$, é fácil perceber que teremos associado a essa **variação angular** e o **tempo** (Δt) em que a mesma ocorre

uma nova grandeza física, que chamaremos neste momento, de **velocidade angular média** (ω).

$$\boxed{\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}} \tag{6.4}$$

A equação 6.4 nos dá o valor da variação de ângulo ao longo do tempo, e essa pode ser medida na unidade **ângulos por segundo**, por exemplo, $90°/\mathrm{s}$. Contudo, é comumente usada como unidade de **velocidade angular média** em termos de radianos por segundo $[\mathrm{rad}/\mathrm{s}]$, ou seja, usando o valor para a variação angular em termos de sua medida em RADIANOS, por exemplo, $\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}/\mathrm{s}$.

Da equação 6.3 podemos perceber que sendo possível uma relação entre variação angular $(\Delta\theta)$ e arco de circunferência (ΔS) deve haver também uma relação entre a **velocidade angular média** (ω) e a **velocidade escalar média** (v). Sabendo que, de 1.3, temos

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

de 6.3 e 6.4, teremos

$$v = \frac{\overbrace{\Delta\theta \cdot R}^{=\Delta S}}{\Delta t} = \underbrace{\boxed{\frac{\Delta\theta}{\Delta t}}}_{=\omega} \cdot R$$

Assim, a relação entre **velocidade escalar média** (v) e **velocidade angular média** (ω) se dá através da equação

VELOCIDADE ESCALAR E ANGULAR

$$v = \omega \cdot R \tag{6.5}$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$v \rightarrow$ velocidade escalar (tangencial)
$\omega \rightarrow$ velocidade angular
$R \rightarrow$ raio da trajetória

Note que essa relação de velocidades é intermediada pelo valor do raio da circunferência em questão. O entendimento para essa relação fica mais simples de forma visual.

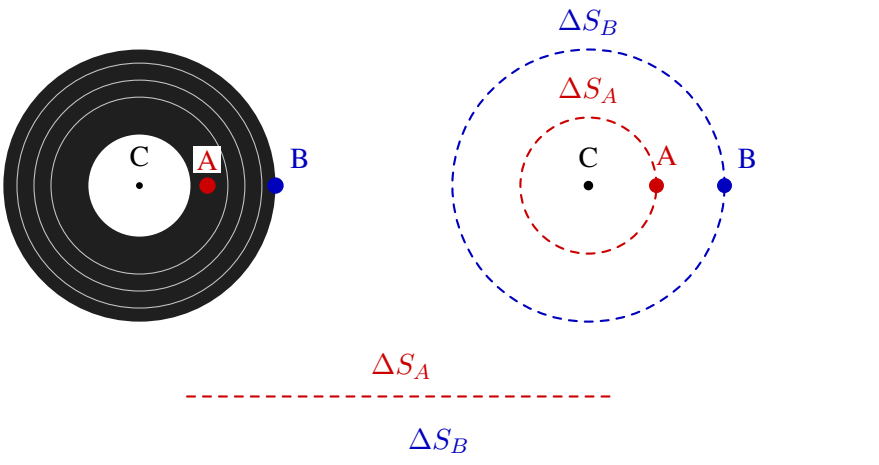


Figura 6.4: À esquerda, um disco de vinil com três pontos destacados: C (centro), B (extremidade do disco) e A (ponto médio entre o centro e a extremidade). À direita, a trajetória dos pontos A e B após uma rotação completa. Abaixo, a projeção retilínea da trajetória dos pontos A e B após uma rotação completa.

Na imagem 6.4 vemos um disco com três pontos destacados. O ponto **C** simboliza o **centro** do disco. O ponto **B** simboliza a **extremidade** e o ponto **A** o **ponto médio** entre o centro e a extremidade. Assim, podemos descrever que o ponto **A** se encontra a uma distância (R_A) do centro igual à **metade** do raio do disco, ao passo que o ponto **B**, na extremidade, se encontra a uma distância (R_B) igual ao **raio inteiro**, ou seja, $R_B = 2R_A$, ambas medidas em **relação ao centro C** do disco. Quando o disco faz uma volta completa podemos dizer que ambos os pontos, **A** e **B**, possuem a **mesma velocidade angular**, visto que **percorreram os mesmos** $360°$ **no mesmo tempo** (Δt). Supondo que o tempo de uma volta completa seja de 1 segundo, poderíamos dizer que $\omega_A = \omega_B = \frac{2\pi \text{rad}}{1\,\text{s}} = 2\pi \text{rad/s}$. **Todos os pontos do disco possuem a mesma velocidade angular** visto que todos percorrem a **mesma variação de ângulo no mesmo tempo**, ao se rotacionar o disco.

Já em relação à velocidade escalar de cada ponto teremos discrepâncias já que essa depende além da velocidade angular, também do **raio em relação ao centro** de cada ponto. E isso fica simples de entender ao se observar a **projeção retilínea da trajetória** de cada ponto, vista na imagem 6.4. Por o ponto **B** estar mais afastado do centro $(R_B > R_A)$ este percorre um deslocamento (ΔS_B) maior do que o deslocamento do ponto **A** (ΔS_A). Como ambos os pontos percorrem estes distintos deslocamentos no mesmo tempo, conforme o exemplo em uma volta completa de duração 1 segundo, fica evidente que para o ponto **B** ter percorrido um deslocamento (ΔS) maior foi necessária uma velocidade escalar média (v_B) maior do que a do ponto **A** (v_A). Se recorrermos à equação 6.5, também fica simples entender que por ambos os pontos terem a mesma velocidade angular $(\omega_B = \omega_A)$, aquele que tiver maior valor de raio $(R_B > R_A)$ possuirá também maior velocidade escalar média $(v_B > v_A)$.

Em uma rotação de um objeto rígido, todos os pontos possuirão a **mesma velocidade angular média**, mas os pontos mais afastados do centro de rotação possuirão maiores valores de **velocidade escalar média**.

Exemplo 6.3

Determine os valores da velocidade angular média e velocidade escalar média na extremidade dos ponteiros de um relógio, sabendo que o ponteiro dos segundos possui $15\,\mathrm{cm}$, dos minutos $10\,\mathrm{cm}$ e das horas $5\,\mathrm{cm}$.

Dados do problema

$$\begin{aligned} R_s &= 15\,\mathrm{cm} \\ R_m &= 10\,\mathrm{cm} \\ R_h &= 5\,\mathrm{cm} \\ \Delta t_s &= 60\,\mathrm{s} \\ \Delta t_m &= 60\,\mathrm{min} = 3600\,\mathrm{s} \\ \Delta t_h &= 12\,\mathrm{h} = 43.200\,\mathrm{s} \\ \omega_s &= ?, \omega_m = ?, \omega_h = ? \\ v_s &= ?, v_m = ?, v_h = ? \end{aligned}$$

Todos os ponteiros do relógio, ao darem uma volta completa, terão percorrido uma variação angular de $\Delta\theta = 360^\circ = 2\pi$. Assim, sabendo os tempos gastos para cada ponteiro completar uma volta, aplicando 6.4 teremos, para o ponteiro dos segundos

$$\omega_s = \frac{\Delta\theta}{\Delta t_s}$$
$$\omega_s = \frac{2\pi}{60\,\mathrm{s}}$$

$$\boxed{\omega_s = \frac{\pi}{30}\,\mathrm{rad/s} \simeq 0{,}1047\,\mathrm{rad/s}}$$

Para o ponteiro dos minutos, teremos

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t_m}$$
$$\omega_m = \frac{2\pi}{3600\,\mathrm{s}}$$

$$\boxed{\omega_m = \frac{\pi}{1800}\,\mathrm{rad/s} \simeq 1{,}74 \times 10^{-3}\,\mathrm{rad/s}}$$

Para o ponteiro das horas, teremos

$$\omega_h = \frac{\Delta\theta}{\Delta t_h}$$
$$\omega_h = \frac{2\pi}{43.200\,\mathrm{s}}$$

$$\boxed{\omega_h = \frac{\pi}{21.600}\,\mathrm{rad/s} \simeq 1{,}45 \times 10^{-4}\,\mathrm{rad/s}}$$

Para determinar a velocidade escalar na extremidade de cada ponteiro poderíamos usar duas possibilidades. Calcular o perímetro da circunferência gerada por cada ponteiro $\Delta S = 2\pi \cdot R$ e dividir pelo tempo gasto para cada volta, ou aplicar a equação 6.5. Para exemplificar a igualdade, será feito dos dois modos para o ponteiro dos segundos.

$$v_s = \frac{\Delta S_s}{\Delta t_s}$$
$$v_s = \frac{2\pi \cdot R_s}{\Delta t_s}$$
$$v_s = \frac{2\pi \cdot 15\,\mathrm{cm}}{60\,\mathrm{s}}$$
$$v_s = \frac{30\pi}{60}\,\mathrm{cm/s}$$
$$\boxed{v_s = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{cm/s}}$$

ou, aplicando 6.5

$$v_s = \omega_s \cdot R_s$$
$$v_s = \frac{\pi}{30}\,\mathrm{rad/s} \cdot 15\,\mathrm{cm}$$
$$v_s = \frac{15\pi}{30}\,\mathrm{cm/s}$$
$$\boxed{v_s = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{cm/s}}$$

O radiano não é uma unidade física

Você deve ter percebido que, no cálculo da velocidade escalar, a unidade $[\mathrm{rad}]$ simplesmente desapareceu, e é importante entendermos por quê. Diferentemente do metro ou do segundo, o **radiano não é uma unidade física de verdade**. Devemos ter claro o que ele realmente é: por definição, um ângulo em radianos é a razão entre o **comprimento de um arco** e o **raio** da circunferência, ou seja, uma divisão de um comprimento por outro comprimento $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}}\right)$. Como as unidades de comprimento se cancelam, o resultado é um número puro, sem unidade.
Por isso, quando multiplicamos uma velocidade angular $(\mathrm{rad/s})$ por um raio (m) para obter a velocidade escalar, o "rad" não deixa nenhum rastro e ficamos apenas com $(\mathrm{m/s})$, exatamente como esperávamos para uma velocidade. Do mesmo modo, a unidade fisicamente correta da velocidade angular é $\frac{1}{\mathrm{s}} = \mathrm{s}^{-1}$. Escrevemos $[\mathrm{rad}]$ apenas como um **lembrete** de que aquele ângulo está medido em radianos, e não em graus; é uma informação para nós, não uma grandeza física a mais.

Para o ponteiro dos minutos, teremos

$$\begin{aligned} v_m &= \omega_m \cdot R_m \\ v_m &= \frac{\pi}{1800}\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 10\,\mathrm{cm} \\ v_m &= \frac{10\pi}{1800}\,\mathrm{cm/s} \\ \boxed{v_m &= \frac{\pi}{180}\,\mathrm{cm/s}} \end{aligned}$$

Para o ponteiro das horas, teremos

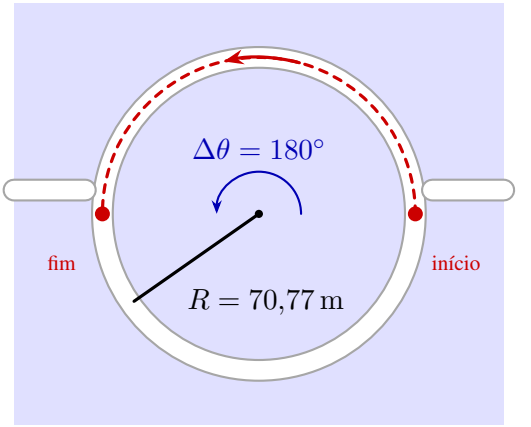
$$\begin{aligned} v_h &= \omega_h \cdot R_h \\ v_h &= \frac{\pi}{21.600}\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 5\,\mathrm{cm} \\ v_h &= \frac{5\pi}{21.600}\,\mathrm{cm/s} \\ \boxed{v_h &= \frac{\pi}{4320}\,\mathrm{cm/s}} \end{aligned}$$

Podemos deixar os resultados em termos de π para obter **maior exatidão**, pois sabemos que π é um número de infinitas casas decimais após a vírgula. Contudo, não há problemas em se aproximar o valor de π para $3{,}14$ e usar o

resultado final somente em termos de números.

Exemplo 6.4

Um carro realiza uma curva equivalente a $\Delta\theta = 180^\circ$ de um círculo de raio $70{,}77\,\mathrm{m}$ em $10\,\mathrm{s}$, conforme a imagem abaixo. Qual foi a velocidade escalar média deste veículo, em $\mathrm{km/h}$, e qual a distância percorrida desde o início até o fim da curva?



Dados do problema

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= 180^\circ = \pi \\ R &= 70{,}77\,\mathrm{m} \\ \Delta t &= 10\,\mathrm{s} \\ v &= ? \\ \Delta S &= ? \end{aligned}$$

Calculando a velocidade angular do carro com a equação 6.4

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\boxed{\omega = \frac{\pi}{10}\,\mathrm{s}^{-1}}$$

Aplicando 6.5

$$
\begin{aligned}
v &= \omega \cdot R \\
v &= \frac{\pi}{10}\,\mathrm{s}^{-1} \cdot 70{,}77\,\mathrm{m} \\
v &= \frac{70{,}77\pi}{10}\,\mathrm{m/s} \\
v &= 7{,}077\pi\,\mathrm{m/s} \\
v &\simeq 22{,}22\,\mathrm{m/s} \\
\boxed{v &\simeq 80\,\mathrm{km/h}}
\end{aligned}
$$

Para calcular a distância percorrida podemos usar a equação da velocidade escalar média 1.3 ou calcular o arco de circunferência pela equação 6.3.

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{\Delta S}{\Delta t} \\
\Delta S &= v \cdot \Delta t \\
\Delta S &= 22{,}22\frac{\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{s}}} \cdot 10\cancel{\mathrm{s}} \\
\boxed{\Delta S &= 222{,}2\,\mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta S &= \Delta\theta \cdot R \\
\Delta S &= \pi \cdot 70{,}77\,\mathrm{m} \\
\Delta S &= 3{,}14 \cdot 70{,}77\,\mathrm{m} \\
\boxed{\Delta S &= 222{,}2\,\mathrm{m}}
\end{aligned}
$$

6.4 Frequência e período

Dois conceitos básicos na física que serão aqui introduzidos são **frequência** e **período**. Estas duas grandezas físicas são sempre apresentadas simultaneamente por serem correlatas, ou seja, terem forte relação entre si. A **frequência** (f) é simplesmente

> o **número de repetições** Δn em um certo evento em um **intervalo de tempo** Δt.

$$\boxed{f = \frac{\Delta n}{\Delta t}} \tag{6.6}$$

ao passo que o **período** (T) nada mais é que

> o **tempo** Δt necessário para uma **única repetição** $\Delta n = 1$.

Em termos matemáticos, a relação entre período e frequência é

$$\boxed{f = \frac{1}{T}} \tag{6.7}$$

que é exatamente o mesmo que

$$\boxed{T = \frac{1}{f}} \tag{6.8}$$

Ou seja, **frequência é o inverso do período**.

A unidade de período é qualquer unidade de tempo que melhor caracterize o tempo de uma repetição. Contudo, ao se usar o Sistema Internacional, o período deve ser medido em segundos $[\mathrm{s}]$. Teremos assim que a unidade resultante para a frequência no S.I. será o inverso de segundos, ou seja, $[\mathrm{s}^{-1}]$. A unidade de frequência $[\mathrm{s}^{-1}]$ acabou sendo mais comumente usada como unidade derivada **hertz**, onde $(1\,\mathrm{s}^{-1} = 1\,\mathrm{Hz})$. Essa unidade derivada leva este nome em homenagem ao físico alemão **Heinrich Rudolf Hertz** (1857-1894).

Outra forma bastante comum de medir frequência é em **rotações por minuto** $[\mathrm{RPM}]$. Essa, como o próprio nome já diz, é usada quando o intervalo de tempo é medido em **minutos**.

Sendo assim, sempre que se ouvir que algo é medido em $[\mathrm{Hz}]$ basicamente temos que pensar que significa um dado número de repetições por segundo, ao passo que se a unidade for RPM, teremos um dado número de repetições por minuto.

Ainda relacionando que o período é dado como o tempo para uma repetição, se considerarmos essa repetição sendo uma volta completa em uma circunferência $(\Delta S = 2\pi R)$, temos que o período pode ser calculado em termos da velocidade escalar média (v) e do raio (R) desta circunferência através da relação:

$$T = \frac{\Delta S}{v}$$
$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

Logo, a velocidade escalar média se relaciona com o período e, consequentemente,

com a frequência, através das equações

$$\boxed{v = \frac{2\pi R}{T}} \tag{6.9}$$

e

$$\boxed{v = 2\pi R f} \tag{6.10}$$

Lembrando que a velocidade escalar média e a velocidade angular se relacionam através da equação 6.5,

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$
$$\omega \cdot \cancel{R} = \frac{2\pi \cancel{R}}{T}$$

Teremos que a velocidade angular se relaciona com o período e, consequentemente, com a frequência, através das equações

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \tag{6.11}$$

e

$$\boxed{\omega = 2\pi f} \tag{6.12}$$

Exemplo 6.5

Qual o período e frequência, em Hz e RPM, de rotação da Terra em torno do seu próprio eixo?

Dados do problema

$$1\text{dia} = 24\,\text{h}$$
$$T = ?$$
$$f = ?$$

Considerando que um dia possui 24 horas, podemos transformar este valor

para minutos e segundos:

$$T = 24\,\mathrm{h} = 24 \cdot 60\,\mathrm{min} = 1440\,\mathrm{min}$$
$$T = 1440\,\mathrm{min} = 1440 \cdot 60\,\mathrm{s} = 86.400\,\mathrm{s}$$

logo, no S.I. o período de rotação da Terra é de

$$\boxed{T = 86.400\,\mathrm{s}}$$

Sabendo o período, usando a equação 6.7, temos

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{86.400\,\mathrm{s}}$$
$$\boxed{f \simeq 1{,}16 \times 10^{-5}\,\mathrm{Hz}}$$

Para determinar a frequência em RPM poderíamos simplesmente usar o período na equação 6.7 em minutos $(T = 1440\,\mathrm{min})$ ou simplesmente multiplicar nosso resultado em Hz por 60. Assim,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1440\,\mathrm{min}}$$
$$\boxed{f \simeq 6{,}94 \times 10^{-4}\,\mathrm{RPM}}$$

$$f \simeq 1{,}16 \times 10^{-5}\,\mathrm{Hz} \cdot 60$$
$$\boxed{f = 6{,}96 \times 10^{-4}\,\mathrm{RPM}}$$

A diferença de $0{,}02 \times 10^{-4} = 0{,}000002$ nos resultados se deve ao arredondamento feito no cálculo da frequência em Hz.

Exemplo 6.6

Qual o período e frequência, em Hz e RPM, de translação da Terra em torno do Sol?

Dados do problema

$$1\mathrm{ano} = 365\mathrm{dias}$$
$$T = ?$$

$$f = ?$$

Considerando que um ano possui 365 dias, temos

$$T = 1\text{ano} = 365 \cdot 24\,\text{h} = 365 \cdot 24 \cdot 60\,\text{min} = 525.600\,\text{min}$$
$$T = 525.600\,\text{min} = 525.600 \cdot 60\,\text{s} = 31.536.000\,\text{s}$$

logo, no S.I. o período de translação da Terra é de

$$\boxed{T = 31.536.000\,\text{s}}$$

Sabendo o período, usando a equação 6.7, temos

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{31.536.000\,\text{s}}$$
$$\boxed{f \simeq 3{,}17 \times 10^{-8}\,\text{Hz}}$$

que em RPM fica

$$f = 3{,}17 \times 10^{-8}\,\text{Hz} \cdot 60$$
$$\boxed{f \simeq 1{,}9 \times 10^{-6}\,\text{RPM}}$$

Exemplo 6.7

Qual o período e frequência, em Hz e RPM, de rotação dos ponteiros dos segundos, minutos e horas de um relógio analógico?

Dados do problema

$$\text{segundos} = 1\text{volta} = 60\,\text{s}$$
$$\text{minutos} = 1\text{volta} = 60\,\text{min}$$
$$\text{horas} = 1\text{volta} = 12\,\text{h}$$
$$T_s = ?$$
$$T_m = ?$$
$$T_h = ?$$
$$f_s = ?$$
$$f_m = ?$$

$$f_h = ?$$

Sabendo que o ponteiro dos segundos faz uma volta a cada 60 segundos, seu período será

$$\boxed{T_s = 60\,\mathrm{s}}$$

Já o ponteiro dos minutos faz uma volta a cada 60 minutos, que em segundos fica $60\,\mathrm{min} = 60 \cdot 60\,\mathrm{s} = 3600\,\mathrm{s}$, assim, seu período será

$$\boxed{T_m = 3600\,\mathrm{s}}$$

Por fim, o ponteiro das horas faz uma volta a cada 12 horas, assim $12\,\mathrm{h} = 12 \cdot 60\,\mathrm{min} = 12 \cdot 60 \cdot 60\,\mathrm{s} = 43.200\,\mathrm{s}$, assim, seu período será

$$\boxed{T_h = 43.200\,\mathrm{s}}$$

Conhecendo os períodos, as frequências saem diretamente de 6.7, lembrando que a frequência é o inverso do período. Para o ponteiro dos segundos

$$f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{60\,\mathrm{s}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_s \simeq 0{,}0167\,\mathrm{Hz} = 1\,\mathrm{RPM}}$$

que é exatamente uma volta por minuto, como já era de se esperar. Para o ponteiro dos minutos

$$f_m = \frac{1}{T_m} = \frac{1}{3600\,\mathrm{s}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_m \simeq 2{,}78 \times 10^{-4}\,\mathrm{Hz} \simeq 0{,}0167\,\mathrm{RPM}}$$

e, por fim, para o ponteiro das horas

$$f_h = \frac{1}{T_h} = \frac{1}{43.200\,\mathrm{s}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_h \simeq 2{,}31 \times 10^{-5}\,\mathrm{Hz} \simeq 1{,}39 \times 10^{-3}\,\mathrm{RPM}}$$

Perceba que quanto mais lento é o ponteiro, menor é sua frequência, pois menos voltas ele completa em um mesmo intervalo de tempo.

Exemplo 6.8

Sabendo que um veículo com uma roda cujo raio seja de $25\,\mathrm{cm}$ se desloca com velocidade escalar média de $108\,\mathrm{km/h}$, determine a frequência, o período de rotação e a velocidade angular desta roda.

Dados do problema

$$\begin{aligned} R_v &= 25\,\text{cm} = 0{,}25\,\text{m} \\ v &= 108\,\text{km/h} = 30\,\text{m/s} \\ f &= ? \\ T &= ? \end{aligned}$$

Sabendo o raio da roda do veículo e a velocidade escalar média deste, podemos determinar a frequência com o uso da equação 6.10

$$\begin{aligned} v &= 2\pi R f \\ f &= \frac{v}{2\pi R} \\ f &= \frac{30\cancel{\text{m}}/\text{s}}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}25\cancel{\text{m}}} \\ f &= \frac{30\text{s}^{-1}}{1{,}57} \end{aligned}$$

Logo, a frequência de rotação da roda é

$$\boxed{f \simeq 19{,}1\,\text{Hz}}$$

Sabendo a frequência podemos determinar o período de rotação da roda simplesmente lembrando que o período é o inverso da frequência, assim

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{f} \\ T &= \frac{1}{19{,}1\,\text{s}^{-1}} \end{aligned}$$

$$\boxed{T \simeq 52{,}4\text{ms}}$$

Sabendo agora a velocidade escalar, raio, frequência e período de rotação da roda, podemos usar diversas relações para calcular a velocidade angular. Será usada aqui a mais simples, que relaciona velocidade angular e frequência 6.12,

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi f \\ \omega &= 2 \cdot 3{,}14 \cdot 19{,}1\text{s}^{-1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\omega \simeq 120\,\text{rad/s}}$$

Exemplo 6.9

Qual o deslocamento, em uma hora, de um carro cuja roda, que possui raio de $40\,\mathrm{cm}$, gira em média 150 vezes por minuto?

Dados do problema

$$\begin{aligned}\Delta S &= ?\\ t &= 1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s}\\ R &= 40\,\mathrm{cm} = 0{,}4\,\mathrm{m}\\ f &= 150\,\mathrm{RPM}\end{aligned}$$

Para saber o deslocamento (ΔS) devemos saber qual a velocidade escalar deste carro. Para isso, basta usarmos a informação da frequência de rotação na relação 6.10. Contudo, observando que a frequência foi dada em RPM devemos primeiramente transformar essa frequência para Hz. Assim,

$$\begin{aligned}f &= 150\,\mathrm{RPM}\\ f &= 150\frac{1}{1\,\mathrm{min}}\\ f &= 150\frac{1}{60\,\mathrm{s}}\\ f &= \frac{150}{60}\,\mathrm{s}^{-1}\end{aligned}$$

Logo, a frequência de rotação da roda em (Hz) é

$$\boxed{f = 2{,}5\,\mathrm{Hz}}$$

Agora basta aplicar a equação 6.10 para determinar a velocidade escalar média,

$$\begin{aligned}v &= 2\pi R f\\ v &= 2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}4\,\mathrm{m}\cdot 2{,}5\,\mathrm{s}^{-1}\\ v &= 6{,}28\,\mathrm{m/s}\end{aligned}$$

Logo, o deslocamento deste veículo que se movimenta com velocidade de $6{,}28\,\mathrm{m/s}$, após uma hora será:

$$\begin{aligned}\Delta S &= v\cdot t\\ \Delta S &= 6{,}28\mathrm{m}/\cancel{\mathrm{s}}\cdot 3600\cancel{\mathrm{s}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta S = 22.608\,\text{m} \simeq 22{,}6\,\text{km}}$$

Resolvendo por outro caminho

Podemos chegar ao mesmo deslocamento por um raciocínio um pouco diferente, pensando em **voltas completas**. Como a roda faz 150 rotações por minuto, ao longo de uma hora ela completa $150 \cdot 60 = 9000$ rotações. A cada volta, o carro avança uma distância igual ao **perímetro** da roda,

$$\Delta S_{1\text{ volta}} = 2\pi R = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}4\,\text{m} = 2{,}512\,\text{m}.$$

Depois das 9000 voltas, o deslocamento total é

$$\Delta S = 9000 \cdot 2{,}512\,\text{m} = 22.608\,\text{m},$$

exatamente o mesmo valor obtido antes. Devemos ter claro que os dois caminhos são equivalentes: um parte da velocidade escalar e do tempo, o outro conta voltas e perímetros, mas ambos descrevem o mesmo movimento.

6.5 Movimento circular uniforme

Antes mesmo de definir o que é um movimento circular uniforme é preciso dar atenção à velocidade num movimento circular. Observando a figura 6.5, vemos que em cada ponto da circunferência o vetor velocidade muda de direção e sentido, ainda que seu módulo permaneça o mesmo. Essa mudança de direção é obra exclusiva da **aceleração centrípeta**. De modo geral, um movimento circular pode apresentar **duas componentes de aceleração**: a **centrípeta**, sempre presente, e a **tangencial**, que só existe quando o **módulo** da velocidade varia.

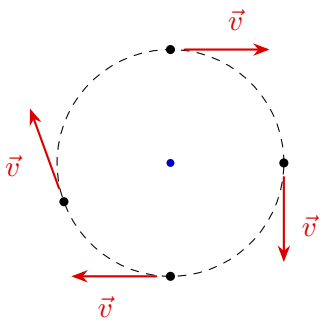


Figura 6.5: Variação da direção e sentido do vetor velocidade de módulo fixo em um movimento circular.

A **aceleração centrípeta** $(\vec{a}_c)$ é a responsável pela constante **mudança de direção e sentido** da velocidade, visto que essa aceleração tem como característica

básica **sempre apontar para o centro da circunferência**, conforme visto na figura 6.6.

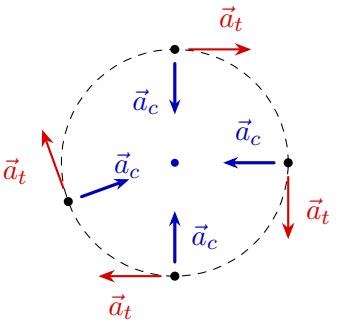


Figura 6.6: Aceleração centrípeta e tangencial destacadas em distintos pontos de um movimento circular **variado**. No movimento circular uniforme a tangencial é nula e resta apenas a centrípeta.

É a presença da aceleração centrípeta que faz com que o movimento seja circular, ou seja, a ausência de aceleração centrípeta acarretaria um movimento retilíneo. Essa aceleração, conforme já mencionado, possui **direção e sentido sempre apontados para o centro da circunferência** e pode ter seu módulo calculado através da equação

ACELERAÇÃO CENTRÍPETA

$$a_c = \frac{v^2}{R} \tag{6.13}$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$a_c \rightarrow$ aceleração centrípeta
$v \rightarrow$ velocidade escalar
$R \rightarrow$ raio da trajetória

Podemos substituir $v = \omega R$ na expressão da aceleração centrípeta e obter $a_c = (\omega R)^2/R = \omega^2 R$. Assim, escolhemos entre $a_c = v^2/R$ e $a_c = \omega^2 R$ conforme os dados disponíveis.

Exemplo 6.10

Um carro percorre uma curva circular plana de raio $50\,\mathrm{m}$ a $72\,\mathrm{km/h}$, com rapidez constante. Calcule sua aceleração centrípeta. Depois determine o valor necessário para percorrer a mesma curva com o dobro da rapidez.

Dados do problema

$$R = 50\,\mathrm{m}$$

$$v = 72\,\mathrm{km/h} = \frac{72}{3{,}6}\,\mathrm{m/s} = 20\,\mathrm{m/s}$$
$$a_c = ?$$

A leitura constante do velocímetro indica apenas que o módulo da velocidade não muda. Na curva, sua direção varia. Calculamos a aceleração voltada para o centro pela equação 6.13:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$
$$a_c = \frac{(20\,\mathrm{m/s})^2}{50\,\mathrm{m}} = \frac{400\,\mathrm{m^2/s^2}}{50\,\mathrm{m}}$$
$$\boxed{a_c = 8\mathrm{m/s^2}}$$

Para percorrer a mesma curva a $40\,\mathrm{m/s}$, a aceleração centrípeta necessária seria

$$a_c = \frac{(40\,\mathrm{m/s})^2}{50\,\mathrm{m}} = \frac{1600\,\mathrm{m^2/s^2}}{50\,\mathrm{m}}$$
$$\boxed{a_c = 32\mathrm{m/s^2}}$$

A aceleração ficou quatro vezes maior porque depende do quadrado da rapidez. Em uma curva plana, a força de atrito dos pneus com o solo fornece essa aceleração horizontal. Se ela não for suficiente para o raio e a rapidez pretendidos, o carro não conseguirá seguir a curva planejada. Retomaremos essa condição no estudo da dinâmica.

A **aceleração tangencial** $(\vec{a}_t)$ é a responsável por **variar o módulo do vetor velocidade** no movimento circular e recebe este nome por ser um vetor que possui **direção e sentido tangente a um dado ponto da circunferência**. Diferentemente da aceleração centrípeta, seu módulo pode ser calculado da mesma forma que uma aceleração qualquer, ou seja, considerando a variação da velocidade ao longo do tempo, como na equação 1.4.

Por fim, com relação às acelerações envolvidas no movimento circular, podemos definir que o vetor aceleração $(\vec{a})$ em um movimento circular é dado pela soma vetorial das duas acelerações envolvidas, assim

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t} \tag{6.14}$$

De modo similar à aceleração tangencial, o **vetor velocidade** neste movimento

possui **direção e sentido sempre tangente** a um dado ponto da circunferência. Por este mesmo motivo é comum que essa velocidade seja chamada de **velocidade tangencial**. Assim, o vetor velocidade no movimento circular sempre será **diferente em cada ponto do círculo**, visto que em cada ponto é **alterada a sua direção e sentido**. Contudo, se a **aceleração tangencial for nula**, não haverá **mudança do módulo** do vetor velocidade em nenhum ponto do movimento circular. Neste caso, temos um movimento circular com **velocidade de módulo constante**, que pode ser chamada de **velocidade tangencial**, **velocidade linear** ou **velocidade escalar média** (como já vínhamos chamando anteriormente).

Podemos agora definir o **movimento circular uniforme** como aquele em que há somente a presença da aceleração centrípeta, ou seja,

> no **movimento circular uniforme** a aceleração tangencial é nula $(a_t = 0)$.

6.6 Acoplamento e transmissão (polias e engrenagens)

Polias, engrenagens e correntes permitem transmitir o giro entre peças de uma máquina. Na bicicleta, por exemplo, a corrente liga a coroa dos pedais à catraca traseira. Para calcular como cada peça gira, precisamos identificar a ligação entre elas. Veremos dois casos: a transmissão pelas bordas e a rotação de peças fixadas rigidamente ao mesmo eixo.

6.6.1 Acoplamento por correia ou por contato

Uma correia inextensível e sem deslizamento impõe a mesma rapidez às bordas das polias que ela conecta. Uma corrente produz uma relação semelhante entre as rodas dentadas. Para duas engrenagens em contato, usamos seus raios primitivos, associados às circunferências de transmissão. Em todos esses casos, a igualdade envolve os **módulos das velocidades tangenciais**. Abaixo, ω_A e ω_B também representam módulos; o sentido do giro deve ser analisado separadamente.

TRANSMISSÃO PELAS BORDAS

$$v_A = v_B \quad \Rightarrow \quad \omega_A \cdot R_A = \omega_B \cdot R_B \tag{6.15}$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

v_A, v_B	$\rightarrow$	rapidez nos pontos de transmissão
ω_A, ω_B	$\rightarrow$	módulos das velocidades angulares
R_A, R_B	$\rightarrow$	raios efetivos de transmissão

Como $\omega_A R_A = \omega_B R_B$, a polia de menor raio completa mais voltas no mesmo tempo. Na bicicleta, uma catraca menor que a coroa gira mais rapidamente que

os pedais. Quanto ao sentido, uma correia aberta faz duas polias paralelas girarem no mesmo sentido; uma correia cruzada ou duas engrenagens externas em contato fazem-nas girar em sentidos opostos.

Exemplo 6.11

Uma polia A, de raio $6\,\mathrm{cm}$, gira a $50\,\mathrm{rad/s}$ e transmite o movimento por uma correia a uma polia B de raio $20\,\mathrm{cm}$. Admitindo correia inextensível e sem deslizamento, determine a rapidez da correia e o módulo da velocidade angular de B.

Dados do problema

$$R_A = 6\,\mathrm{cm} = 0{,}06\,\mathrm{m}$$
$$\omega_A = 50\,\mathrm{rad/s}$$
$$R_B = 20\,\mathrm{cm} = 0{,}2\,\mathrm{m}$$
$$v = ? \quad \omega_B = ?$$

A correia acompanha a borda de A. Calculamos sua rapidez usando o raio em metros:

$$v_A = \omega_A \cdot R_A = 50\,\mathrm{rad/s} \cdot 0{,}06\,\mathrm{m}$$

$$\boxed{v_A = 3\mathrm{m/s}}$$

A borda de B tem a mesma rapidez, $v_B = 3\,\mathrm{m/s}$. Pela relação 6.15, encontramos

$$\omega_A \cdot R_A = \omega_B \cdot R_B$$
$$\omega_B = \frac{\omega_A \cdot R_A}{R_B} = \frac{50\,\mathrm{rad/s} \cdot 0{,}06\,\mathrm{m}}{0{,}2\,\mathrm{m}} = \frac{3\,\mathrm{m/s}}{0{,}2\,\mathrm{m}}$$

$$\boxed{\omega_B = 15\mathrm{rad/s}}$$

6.6.2 Acoplamento no mesmo eixo

Quando duas peças estão presas rigidamente ao **mesmo eixo**, sem girar uma em relação à outra, elas percorrem ângulos iguais em tempos iguais. Portanto, têm a mesma velocidade angular, o mesmo período e a mesma frequência. Devemos ter claro que apenas compartilhar o eixo não garante essa igualdade: as peças precisam girar solidárias.

PEÇAS SOLIDÁRIAS AO EIXO

$$\omega_A = \omega_B \quad \Rightarrow \quad \frac{v_A}{R_A} = \frac{v_B}{R_B} \tag{6.16}$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$\omega_A, \omega_B \rightarrow$ módulos das velocidades angulares
$v_A, v_B \rightarrow$ rapidez de cada ponto
$R_A, R_B \rightarrow$ raios das trajetórias dos pontos

Como $v = \omega R$, o ponto mais distante do eixo tem maior rapidez. Por isso, a ponta de um ponteiro percorre um arco maior no mesmo tempo.

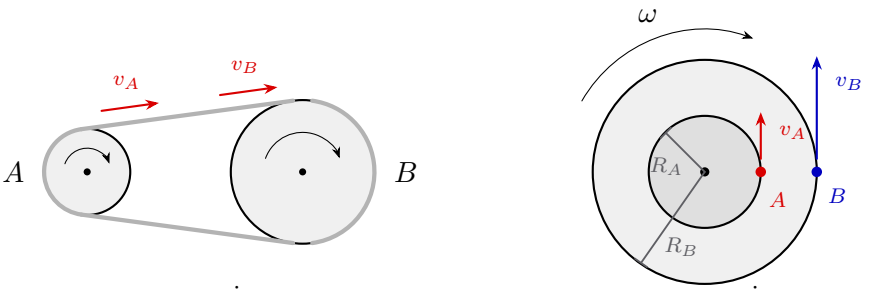


Figura 6.7: As duas formas de acoplamento: por correia, à esquerda (conserva a velocidade escalar), e no mesmo eixo, à direita (conserva a velocidade angular).

Para resolver transmissões com várias peças, identificamos cada ligação da figura 6.7: igualamos a rapidez das bordas sem deslizamento ou a velocidade angular das peças solidárias. Depois aplicamos $v = \omega R$.

Exemplo 6.12

Em uma bicicleta, a coroa de raio $10\,\text{cm}$ gira a $2\,\text{rad/s}$ e aciona, por corrente sem deslizamento, uma catraca de raio $4\,\text{cm}$. A roda traseira, de raio $35\,\text{cm}$, gira solidária à catraca durante a pedalada. Calcule a velocidade angular da catraca e a rapidez da borda da roda **em relação ao eixo**.

Dados do problema

$$R_c = 10\,\text{cm}, \quad \omega_c = 2\,\text{rad/s}, \quad R_{cat} = 4\,\text{cm}, \quad R_r = 35\,\text{cm} = 0{,}35\,\text{m}$$

Pela corrente, $\omega_c R_c = \omega_{cat} R_{cat}$. Portanto,

$$\omega_{cat} = \frac{\omega_c R_c}{R_{cat}} = \frac{2 \cdot 10}{4}\,\text{rad/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_{cat} = 5\,\text{rad/s}.}$$

A roda tem $\omega_r = \omega_{cat} = 5\,\text{rad/s}$. Usando $R_r = 0{,}35\,\text{m}$,

$$v_r = \omega_r R_r = 5\,\text{rad/s} \cdot 0{,}35\,\text{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_r = 1{,}75\,\text{m/s}.}$$

Exemplo 6.13

Um motor gira a $30\,\mathrm{Hz}$ e aciona, por uma correia sem deslizamento, uma polia de raio $15\,\mathrm{cm}$. A polia do motor tem raio $5\,\mathrm{cm}$. Presa ao mesmo eixo da polia maior gira o disco de um esmeril, de raio $10\,\mathrm{cm}$. Determine a frequência do disco, em hertz e em rotações por minuto, e a rapidez de um ponto de sua borda.

Dados do problema

$$f_m = 30\,\mathrm{Hz}, \quad R_m = 5\,\mathrm{cm}, \quad R_p = 15\,\mathrm{cm}, \quad R_d = 10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}$$

Devemos ter claro que aqui temos os dois acoplamentos ao mesmo tempo: a correia conserva a rapidez da borda, e o eixo comum conserva a velocidade angular. Começando pela correia, como $v = \omega R$ e $\omega = 2\pi f$, temos $v = 2\pi f R$. O fator 2π aparece dos dois lados e some, de modo que a relação 6.15 vale também para as frequências,

$$f_m \cdot R_m = f_p \cdot R_p \quad \Rightarrow \quad f_p = \frac{30\,\mathrm{Hz} \cdot 5\,\mathrm{cm}}{15\,\mathrm{cm}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_p = 10\,\mathrm{Hz}}$$

Não foi preciso converter os raios, pois eles aparecem em uma razão. Pelo eixo comum, $f_d = f_p = 10\,\mathrm{Hz}$. Em rotações por minuto,

$$f_d = 10\,\mathrm{Hz} = 10 \cdot 60\,\mathrm{rpm} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_d = 600\,\mathrm{rpm}}$$

Finalmente, usamos $\omega = 2\pi f$ e depois $v = \omega R$,

$$\omega_d = 2\pi f_d = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 \quad \Rightarrow \quad \omega_d = 62{,}8\,\mathrm{rad/s}$$
$$v_d = \omega_d \cdot R_d = 62{,}8\,\mathrm{rad/s} \cdot 0{,}1\,\mathrm{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_d = 6{,}28\,\mathrm{m/s}}$$

Perceba que o motor gira três vezes mais rápido que o disco, pois aciona uma polia de raio três vezes maior.

Síntese do capítulo

No **MCU**, a rapidez é constante, $a_t = 0$ e $a_c = v^2/R = \omega^2 R$ aponta para o centro. O período é o tempo de uma volta, $f = 1/T$ e $\omega = 2\pi f$, com ângulos em radianos. A relação $v = \omega R$ liga as grandezas lineares e angulares. Bordas ligadas sem deslizamento têm a mesma rapidez; peças solidárias ao eixo têm a mesma velocidade angular.

Lista de exercícios 6

1. Em uma trajetória curva, qual componente da aceleração altera a rapidez e qual altera a direção da velocidade?
2. Expresse em radianos os ângulos $90°$, $120°$ e $270°$.
3. Determine as medidas em graus de $(\pi/6)\,\mathrm{rad}$, $(3\pi/4)\,\mathrm{rad}$ e $2\pi\,\mathrm{rad}$.
4. Um disco de raio $0{,}2\,\mathrm{m}$ gira a $10\,\mathrm{rad/s}$ em torno de um eixo fixo pelo centro. Calcule a rapidez de um ponto da borda.
5. Uma roda completa 300 voltas a cada minuto, com giro uniforme. Calcule a frequência em Hz e o tempo de uma volta.
6. O tempo de uma volta de um carrossel em MCU é $4\,\mathrm{s}$. Determine o módulo da velocidade angular.
7. Um ponto descreve uma circunferência de raio $0{,}5\,\mathrm{m}$ a $3\,\mathrm{m/s}$. Qual é o módulo de sua aceleração centrípeta?
8. Para um disco que gira uniformemente a $20\,\mathrm{rad/s}$, calcule a rapidez e a aceleração centrípeta de um ponto a $0{,}3\,\mathrm{m}$ do eixo.
9. A hélice de um drone completa 6000 rotações por minuto. Admitindo giro uniforme, encontre a frequência em Hz, o período e o módulo da velocidade angular.
10. Uma correia liga duas polias de raios $10\,\mathrm{cm}$ e $30\,\mathrm{cm}$. A menor gira a $60\,\mathrm{rad/s}$. Qual é o módulo da velocidade angular da maior, se a correia não se alonga nem desliza?
11. Uma polia de raio $5\,\mathrm{cm}$ gira a $40\,\mathrm{rad/s}$ e aciona por correia outra de raio $20\,\mathrm{cm}$. A segunda está rigidamente presa ao eixo de um disco de corte de raio $15\,\mathrm{cm}$. Sem alongamento ou deslizamento da correia, calcule a velocidade angular do disco e a rapidez de sua borda em relação ao eixo.
12. Use $24\,\mathrm{h}$ como aproximação para o período de rotação da Terra e estime o módulo de sua velocidade angular.
13. Um satélite percorre uma órbita circular de raio $7000\,\mathrm{km}$ com rapidez constante de $7{,}5\,\mathrm{km/s}$. Calcule o tempo de uma volta e o módulo da aceleração centrípeta.
14. Dois pontos de um ponteiro de relógio giram com a mesma velocidade angular. Explique por que o ponto mais distante do eixo tem maior rapidez.

7

Movimento Circular Uniformemente Variado

O que você vai aprender

- Distinguir aceleração angular média e instantânea.
- Identificar as condições em que o giro pode ser descrito pelo MCUV.
- Resolver problemas com as equações horárias e de Torricelli angulares.
- Usar $a_t = \alpha R$ com uma orientação definida.
- Compor as parcelas centrípeta e tangencial da aceleração.

Por que estudamos isto? Ao ligar um ventilador, vemos suas pás ganharem rapidez; depois de desligá-lo, acompanhamos a redução do giro até a parada. Nesses intervalos a velocidade angular varia, e o movimento circular uniforme já não descreve a situação. Vamos estudar o caso em que essa variação ocorre de maneira uniforme. As equações do MUV nos servirão de ponto de partida, agora escritas para o ângulo e para a velocidade angular.

7.1 Aceleração angular

No capítulo anterior estudamos giros de rapidez constante. Agora podemos perguntar como descrever a roda de um carro durante uma arrancada ou uma frenagem. Em ambos os casos, a velocidade angular (ω) muda com o tempo. A grandeza que quantifica essa mudança é a **aceleração angular** (α). Consideraremos rotações em torno de um eixo fixo, com o centro da trajetória em repouso no referencial adotado. Escolhido um sentido positivo de giro, as grandezas angulares terão sinais de acordo com essa escolha.

Para um intervalo de tempo, dividimos a variação da velocidade angular pelo tempo decorrido e obtemos a **aceleração angular média** (α_m). Sua unidade no Sistema Internacional é o radiano por segundo ao quadrado $[\mathrm{rad/s^2}]$. A aceleração angular instantânea descreve essa variação em um instante; podemos entendê-la como o valor ao qual a razão abaixo tende quando tomamos intervalos cada vez menores.

ACELERAÇÃO ANGULAR MÉDIA

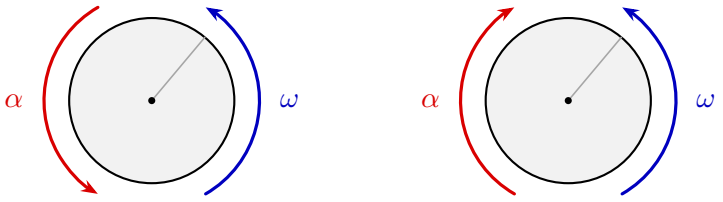
$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} \tag{7.1}$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

α_m	$\rightarrow$	aceleração angular média no intervalo
ω_0, ω	$\rightarrow$	velocidades angulares inicial e final
t_0, t	$\rightarrow$	instantes inicial e final

Se a aceleração angular permanece constante, temos o **movimento circular uniformemente variado (MCUV)**: em intervalos de tempo iguais, a velocidade angular sofre variações iguais. Nesse caso, $\alpha_m = \alpha$. Note que ω e α de mesmo

sinal indicam aumento da rapidez do giro; sinais opostos indicam diminuição. Se a velocidade angular chega a zero e a mesma aceleração é mantida, o movimento passa a ocorrer no sentido contrário. Essa comparação vale nos instantes em que $\omega \neq 0$; o sinal de α, sozinho, não informa se o corpo ganha ou perde rapidez, exatamente como vimos para os movimentos acelerado e retardado no Capítulo 1. A figura 7.1 mostra as duas possibilidades.



giro **acelerado**
mesmo sentido

giro **freado**
sentidos opostos

Figura 7.1: À esquerda, a aceleração angular (α) tem o mesmo sentido da velocidade angular (ω) e o giro fica cada vez mais rápido. À direita, os sentidos são opostos e o giro vai sendo freado.

Exemplo 7.1

Um ventilador começa a girar a partir do repouso e chega a $60\,\mathrm{rad/s}$ em $5\,\mathrm{s}$. Admitindo aumento uniforme da velocidade angular, determine a aceleração angular das pás.

Dados do problema

$$\omega_0 = 0\,\mathrm{rad/s}, \quad \omega = 60\,\mathrm{rad/s}, \quad t = 5\,\mathrm{s}$$

Escolhemos como positivo o sentido do giro. A aceleração é constante e coincide com a média da equação 7.1. Assim,

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{60\,\mathrm{rad/s} - 0}{5\,\mathrm{s}}$$

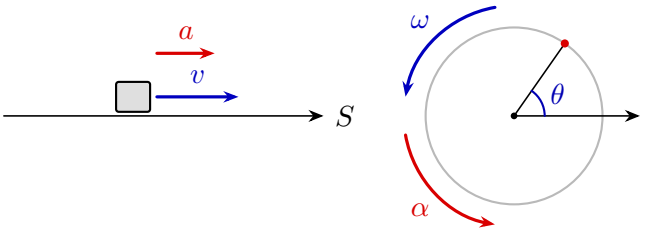
$$\boxed{\alpha = 12\,\mathrm{rad/s^2}}$$

Em cada segundo, a velocidade angular aumenta $12\,\mathrm{rad/s}$. Temos então um giro que ganha rapidez no sentido escolhido como positivo.

7.2 Equações horárias angulares

Já conhecemos, no MUV, as relações entre posição, velocidade, aceleração e tempo. Para o giro com aceleração angular constante, o raciocínio é semelhante:

a posição angular (θ) corresponde à posição (S), a velocidade angular (ω) corresponde a (v) e a aceleração angular (α) corresponde a (a). As equações têm a mesma forma matemática, mas descrevem grandezas físicas e unidades diferentes. Essa correspondência aparece na figura 7.2. Nas equações a seguir, adotaremos $t_0 = 0$, de modo que t representa o tempo decorrido.



movimento retilíneo
S, v, a

movimento circular
θ, ω, α

Figura 7.2: A cada grandeza do movimento retilíneo corresponde uma grandeza angular: a posição (S) vira o ângulo (θ), a velocidade (v) vira a velocidade angular (ω) e a aceleração (a) vira a aceleração angular (α).

Sendo assim, da mesma forma que no MUV a velocidade era dada pela equação 3.1, $v = v_0 + a \cdot t$, temos que a **equação horária da velocidade angular** no MCUV é dada por

VELOCIDADE ANGULAR (MCUV)

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t \tag{7.2}$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

- $\omega \rightarrow$ velocidade angular no instante t
- $\omega_0 \rightarrow$ velocidade angular inicial
- $\alpha \rightarrow$ aceleração angular (constante)
- $t \rightarrow$ tempo decorrido

ou seja, a velocidade angular (ω) em um certo tempo (t) é dada em decorrência da velocidade angular inicial (ω_0) do giro, da aceleração angular (α) e do tempo (t) decorrido. E do mesmo modo que a posição no MUV dependia do tempo de forma quadrática, conforme a equação 3.2, o ângulo descrito no MCUV também dependerá. Temos então que a **equação horária do ângulo**, ou posição angular, é dada por

ÂNGULO (MCUV)

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \tag{7.3}$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$\theta \rightarrow$ ângulo (posição angular) no instante t
$\theta_0 \rightarrow$ ângulo inicial
$\omega_0 \rightarrow$ velocidade angular inicial
$\alpha \rightarrow$ aceleração angular (constante)
$t \rightarrow$ tempo decorrido

Quando o tempo não aparece nos dados nem no que se pede, podemos usar uma relação direta entre velocidades e deslocamento angular. Para obtê-la, eliminamos t entre as duas equações horárias, como fizemos no Capítulo 3. Chegamos então à **equação de Torricelli angular**, válida para aceleração angular constante.

TORRICELLI ANGULAR

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta \tag{7.4}$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$\omega \rightarrow$ velocidade angular final
$\omega_0 \rightarrow$ velocidade angular inicial
$\alpha \rightarrow$ aceleração angular (constante)
$\Delta\theta \rightarrow$ deslocamento angular

Devemos ter claro que $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ é o deslocamento angular acumulado, que pode ultrapassar uma volta. Se o giro não muda de sentido, o número de voltas percorridas é $|\Delta\theta|/(2\pi)$. Havendo inversão, precisamos somar os ângulos percorridos em cada sentido para encontrar a quantidade total de voltas. Vejamos agora, através de alguns exemplos, como aplicá-las.

Exemplo 7.2

Em $4\,\mathrm{s}$, um disco inicialmente em repouso alcança $20\,\mathrm{rad/s}$, mantendo aceleração angular constante. Calcule essa aceleração, o deslocamento angular e o número de voltas percorridas.

Dados do problema

$$\omega_0 = 0\,\mathrm{rad/s}, \quad \omega = 20\,\mathrm{rad/s}, \quad t = 4\,\mathrm{s}, \quad \theta_0 = 0$$

Primeiramente, a variação de velocidade angular por unidade de tempo fornece

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{20\,\mathrm{rad/s} - 0}{4\,\mathrm{s}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 5\,\mathrm{rad/s^2}}$$

Adotando a posição inicial como origem angular, temos $\theta_0 = 0$ e $\Delta\theta = \theta$. Com $\omega_0 = 0$, a equação 7.3 fica

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 40\,\mathrm{rad}}$$

Como não houve inversão do giro, dividimos o ângulo percorrido por 2π, que corresponde a uma volta:

$$n = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{40}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n \simeq 6{,}4 \text{ voltas}}$$

Exemplo 7.3

Uma roda inicia uma frenagem uniforme quando sua velocidade angular é $40\,\mathrm{rad/s}$. O módulo da aceleração angular vale $8\,\mathrm{rad/s^2}$. Determine o tempo até a parada e a velocidade angular depois de $2\,\mathrm{s}$ de frenagem.

Dados do problema

$$\omega_0 = 40\,\mathrm{rad/s}, \quad \alpha = -8\,\mathrm{rad/s^2}$$

O sentido inicial do giro será positivo. A frenagem reduz a velocidade angular, por isso $\alpha = -8\,\mathrm{rad/s^2}$. Na parada, $\omega = 0$; substituindo esses valores na equação 7.2, temos

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha \cdot t \\ 0 &= 40\,\mathrm{rad/s} - 8\,\mathrm{rad/s^2} \cdot t \\ 8 \cdot t &= 40 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 5\,\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Para saber como a roda gira antes da parada, substituímos $t = 2\,\mathrm{s}$ nessa mesma relação:

$$\omega = 40\,\mathrm{rad/s} - 8\,\mathrm{rad/s^2} \cdot 2\,\mathrm{s} = 40 - 16 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega = 24\,\mathrm{rad/s}}$$

Nesse instante a roda ainda gira no sentido inicial, com menor rapidez. O modelo da frenagem descrita termina quando ela para, em $t = 5\,\mathrm{s}$.

Exemplo 7.4

A velocidade angular de uma roda passa de $10\,\mathrm{rad/s}$ para $30\,\mathrm{rad/s}$ durante um deslocamento de $40\,\mathrm{rad}$. Se a aceleração angular é constante, qual é seu valor?

Dados do problema

$$\omega_0 = 10\,\mathrm{rad/s}, \quad \omega = 30\,\mathrm{rad/s}, \quad \Delta\theta = 40\,\mathrm{rad}$$

Os dados relacionam duas velocidades angulares ao ângulo percorrido. Pode-

mos usar diretamente a equação 7.4, sem calcular antes o tempo:

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\Delta\theta} = \frac{30^2 - 10^2}{2 \cdot 40}\,\mathrm{rad/s^2}$$
$$= \frac{800}{80}\,\mathrm{rad/s^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = 10\,\mathrm{rad/s^2}}$$

7.3 Aceleração tangencial e aceleração total

Resta relacionar a variação do giro com a aceleração de um ponto do corpo. Enquanto esse ponto se move sobre a circunferência, sua velocidade muda de direção; essa mudança é descrita pela componente **centrípeta** da aceleração, de módulo $a_c = \omega^2 R$. Se a rapidez também varia, há uma componente **tangencial**, ao longo da tangente à trajetória. Ela pode favorecer ou contrariar o movimento. Temos, portanto, duas componentes de um único vetor aceleração. No instante em que o ponto está em repouso, $a_c = 0$, embora a componente tangencial possa ser diferente de zero.

Para um raio fixo, o arco orientado é $S = R\theta$. Por isso, a velocidade escalar orientada e a componente tangencial da aceleração obedecem às relações $v = R\omega$ e $a_t = R\alpha$. Note que o sinal de a_t acompanha o de α, desde que usemos a mesma orientação positiva. Quando nos interessa apenas o módulo, escrevemos $|a_t| = R|\alpha|$.

ACELERAÇÃO TANGENCIAL

$$a_t = \alpha \cdot R \tag{7.5}$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$a_t \rightarrow$ componente tangencial orientada
$\alpha \rightarrow$ aceleração angular orientada
$R \rightarrow$ raio da trajetória

A componente centrípeta é radial, e a tangencial é perpendicular ao raio. O vetor aceleração resulta da soma dessas componentes, conforme a equação 6.14. Como elas são perpendiculares, podemos encontrar o módulo da aceleração pelo teorema de Pitágoras, já estudado no Volume 1:

ACELERAÇÃO TOTAL NO MOVIMENTO CIRCULAR

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} \tag{7.6}$$

SIGNIFICADO DOS TERMOS

$a \rightarrow$ módulo da aceleração total
$a_c \rightarrow$ módulo da componente centrípeta
$a_t \rightarrow$ componente tangencial orientada

No MCU a componente tangencial é nula, e a aceleração aponta para o centro. Já em um giro com $\alpha \neq 0$, um ponto situado a $R > 0$ apresenta também a componente tangencial. A resultante fica inclinada em relação à direção radial e, se $\omega = 0$ naquele instante, torna-se inteiramente tangencial. A figura 7.3 representa a composição em um instante com as duas componentes diferentes de zero.

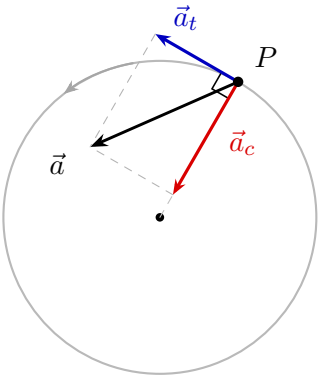


Figura 7.3: No movimento circular uniformemente variado a aceleração de um ponto P tem duas componentes perpendiculares: a centrípeta ($\vec{a}_c$), apontada para o centro, e a tangencial ($\vec{a}_t$), tangente à trajetória. A aceleração total ($\vec{a}$) é a soma vetorial das duas e, por isso, não aponta para o centro.

Exemplo 7.5

Um disco de raio $0{,}5\,\mathrm{m}$ gira em torno de um eixo fixo. Em certo instante, $\omega = 4\,\mathrm{rad/s}$ e $\alpha = 3\,\mathrm{rad/s^2}$. Para um ponto da borda, calcule as componentes centrípeta e tangencial e o módulo da aceleração resultante.

Dados do problema

$$R = 0{,}5\,\mathrm{m}, \quad \omega = 4\,\mathrm{rad/s}, \quad \alpha = 3\,\mathrm{rad/s^2}$$

Primeiramente, usamos ω e R para obter a componente centrípeta. Em seguida, calculamos a tangencial com α e o mesmo raio:

$$a_c = \omega^2 R = 4^2 \cdot 0{,}5\,\mathrm{m/s^2} = \boxed{a_c = 8\,\mathrm{m/s^2}},$$
$$a_t = \alpha R = 3 \cdot 0{,}5\,\mathrm{m/s^2} = \boxed{a_t = 1{,}5\,\mathrm{m/s^2}}.$$

Como essas componentes são perpendiculares, a equação 7.6 fornece

$$a = \sqrt{8^2 + 1{,}5^2}\,\mathrm{m/s^2} = \sqrt{66{,}25}\,\mathrm{m/s^2} \simeq \boxed{a \simeq 8{,}14\,\mathrm{m/s^2}}.$$

A resultante se inclina em relação ao raio devido à componente tangencial.

Exemplo 7.6

Um disco gira a $12\,\mathrm{rad/s}$ quando passa a sofrer uma aceleração angular constante de módulo $4\,\mathrm{rad/s^2}$, em sentido contrário ao do giro. Determine o instante em que o disco para, o ângulo que ele descreve até parar e, nos primeiros $5\,\mathrm{s}$, o seu deslocamento angular e o número de voltas percorridas.

Dados do problema

$$\omega_0 = 12\,\mathrm{rad/s}, \quad \alpha = -4\,\mathrm{rad/s^2}, \quad \theta_0 = 0$$

Adotando como positivo o sentido inicial do giro, a aceleração entra com sinal negativo. Na parada, $\omega = 0$ na equação 7.2,

$$0 = 12\,\mathrm{rad/s} - 4\,\mathrm{rad/s^2} \cdot t \quad \Rightarrow \quad \boxed{t = 3\,\mathrm{s}}$$

O ângulo até ali sai da equação 7.3, com $t = 3\,\mathrm{s}$,

$$\theta = 12 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3^2 = 36 - 18 \quad \Rightarrow \quad \theta = 18\,\mathrm{rad}$$

Aqui está o ponto delicado: a aceleração continua agindo depois da parada, e o disco passa a girar no sentido contrário. Com $t = 5\,\mathrm{s}$,

$$\theta = 12 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5^2 = 60 - 50 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\theta = 10\,\mathrm{rad}}$$

Devemos ter claro que esses $10\,\mathrm{rad}$ são o deslocamento angular, e não o quanto o disco girou. Entre $3\,\mathrm{s}$ e $5\,\mathrm{s}$ ele voltou $18 - 10 = 8\,\mathrm{rad}$, logo o ângulo percorrido foi $18 + 8 = 26\,\mathrm{rad}$, e é ele que dividimos por 2π,

$$n = \frac{26}{2 \cdot 3{,}14} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n \simeq 4{,}1 \text{ voltas}}$$

Dividindo o deslocamento de $10\,\mathrm{rad}$ por 2π teríamos $1{,}6$ volta, bem menos do que o disco girou. Havendo inversão de sentido, deslocamento angular e ângulo percorrido deixam de coincidir.

Síntese do capítulo

No MCUV, α é constante: $\omega = \omega_0 + \alpha t$ e $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \alpha t^2/2$. Eliminando o tempo, temos $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\theta$. Para um ponto a uma distância fixa R do eixo, a aceleração possui as componentes $a_c = \omega^2 R$ e $a_t = \alpha R$, perpendiculares entre si. Seu módulo é $a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$. A primeira componente descreve a mudança de direção da velocidade; a segunda, a variação de sua rapidez.

Lista de exercícios 7

Nos exercícios de MCUV, considere o eixo de rotação fixo e a aceleração angular constante. Adote como positivo o sentido inicial do giro, salvo indicação contrária.

1. Explique o que medem a aceleração angular média e a instantânea, indicando sua unidade no SI. Como distinguimos o MCU do MCUV?
2. As pás de um ventilador saem do repouso e chegam a $90\,\mathrm{rad/s}$ em $6\,\mathrm{s}$. Calcule a aceleração angular nesse processo.
3. Um disco começa a girar do repouso com $\alpha = 2\,\mathrm{rad/s^2}$. Determine ω ao fim de $5\,\mathrm{s}$.
4. Uma roda reduz sua velocidade angular de $30\,\mathrm{rad/s}$ a zero em $6\,\mathrm{s}$. Encontre a aceleração angular, incluindo seu sinal.
5. Partindo do repouso com $\alpha = 3\,\mathrm{rad/s^2}$, quanto um disco gira em $4\,\mathrm{s}$? Expresse o deslocamento em radianos e em voltas.
6. Para um disco com $\theta_0 = 0$, $\omega_0 = 2\,\mathrm{rad/s}$ e $\alpha = 4\,\mathrm{rad/s^2}$, escreva $\omega(t)$ e $\theta(t)$. Calcule ambas as grandezas em $t = 3\,\mathrm{s}$.
7. Durante um deslocamento angular de $75\,\mathrm{rad}$, a velocidade angular de uma roda cresce de $10\,\mathrm{rad/s}$ para $40\,\mathrm{rad/s}$. Determine α.
8. Um ponto de um disco está a $0{,}3\,\mathrm{m}$ do eixo. Se $\alpha = 4\,\mathrm{rad/s^2}$, qual é sua componente tangencial da aceleração?
9. Uma roda inicia o giro do repouso com $\alpha = \pi\,\mathrm{rad/s^2}$. Quantas voltas completas percorre em $4\,\mathrm{s}$?
10. Na borda de um disco de raio $0{,}4\,\mathrm{m}$, determine a_c, a_t e o módulo da aceleração resultante no instante em que $\omega = 5\,\mathrm{rad/s}$ e $\alpha = 2\,\mathrm{rad/s^2}$.
11. Uma serra, inicialmente a $120\,\mathrm{rad/s}$, completa 60 voltas durante a frenagem até parar. Calcule a aceleração angular e a duração da frenagem.
12. Compare a direção da aceleração no MCU com a de um ponto a $R > 0$ em um giro com $\alpha \neq 0$. O que ocorre com suas componentes no instante em que $\omega = 0$?

Gabarito

Reunimos aqui as respostas dos exercícios de valor numérico do volume. As questões conceituais e de construção de gráficos ficam a cargo do estudante.

Capítulo 1: Conceitos Iniciais

8. $1{,}5 \times 10^3\,\mathrm{m} = 1{,}5\,\mathrm{km}$; $1 \times 10^{-6}\,\mathrm{m} = 1\,\mu\mathrm{m}$; $1{,}2 \times 10^2\,\mathrm{m} = 0{,}12\,\mathrm{km}$; $2 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} = 2\,\mathrm{cm}$; $7 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} = 7\,\mathrm{mm}$; $5 \times 10^{-15}\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{fm}$; $5{,}545 \times 10^{12}\,\mathrm{m} = 5{,}545\,\mathrm{Tm}$. **13.** $1{,}2 \times 10^6\,\mathrm{m}$; $200\,\mathrm{m}$; $2{,}5\,\mathrm{m}$; $0{,}004\,\mathrm{m}$; $425\,\mathrm{m}$; $0{,}025\,\mathrm{m}$; $2 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}$; $1\,\mathrm{m}$. **14.** $\Delta S = -15\,\mathrm{m}$ e $d = 55\,\mathrm{m}$. **15.** $\Delta t = 4$ dias, 6 horas, 45 minutos e 40 segundos, ou seja, $\Delta t = 369.940\,\mathrm{s}$. **17.** $v_m = 20\,\mathrm{m/s} = 72\,\mathrm{km/h}$. **18.** $10\,\mathrm{m/s}$; $5\,\mathrm{m/s}$; $2\,\mathrm{m/s}$; $0{,}5\,\mathrm{m/s}$; $2{,}5\,\mathrm{m/s}$; $2{,}5\,\mathrm{m/s}$. **24.** $a_{01} = 4\,\mathrm{m/s^2}$; $a_{12} = -1\,\mathrm{m/s^2}$; $a_{02} = -0{,}29\,\mathrm{m/s^2}$.

Capítulo 2: Movimento Uniforme

3. $S = -5 + 20 \cdot t$. **4. a)** $S_0 = 8\,\mathrm{m}$, $v = 2\,\mathrm{m/s}$, $S\,(5\,\mathrm{s}) = 18\,\mathrm{m}$; **b)** $S_0 = 16\,\mathrm{m}$, $v = -7\,\mathrm{m/s}$, $S\,(5\,\mathrm{s}) = -19\,\mathrm{m}$; **c)** $S_0 = -5\,\mathrm{m}$, $v = 3\,\mathrm{m/s}$, $S\,(5\,\mathrm{s}) = 10\,\mathrm{m}$; **d)** $S_0 = -12\,\mathrm{m}$, $v = -9\,\mathrm{m/s}$, $S\,(5\,\mathrm{s}) = -57\,\mathrm{m}$; **e)** $S_0 = 0\,\mathrm{m}$, $v = -2\,\mathrm{m/s}$, $S\,(5\,\mathrm{s}) = -10\,\mathrm{m}$; **f)** $S_0 = 14\,\mathrm{m}$, $v = 1\,\mathrm{m/s}$, $S\,(5\,\mathrm{s}) = 19\,\mathrm{m}$; **g)** $S_0 = 0\,\mathrm{m}$, $v = 1\,\mathrm{m/s}$, $S\,(5\,\mathrm{s}) = 5\,\mathrm{m}$. **5.** $S_{1\mathrm{s}} = 24\,\mathrm{m}$, $S_{2\mathrm{s}} = 18\,\mathrm{m}$, $S_{3\mathrm{s}} = 12\,\mathrm{m}$, $S_{5\mathrm{s}} = 0\,\mathrm{m}$ e $S_{50\mathrm{s}} = -270\,\mathrm{m}$. **6.** $S = 12 - 8 \cdot t$. **7.** $S = 4 - 0{,}75 \cdot t$ e $S = -5\,\mathrm{m}$. **9.** $t = 2{,}4\,\mathrm{s}$. **10.** $S = 60 + 108 \cdot t$ (em km e h) e $t = 1\,\mathrm{h}$. **11.** $t_{\mathrm{favor}} = 10\,\mathrm{s}$ e $t_{\mathrm{contra}} = 15\,\mathrm{s}$. **12.** $S = 470\,\mathrm{m}$. **13.** $v = -3\,\mathrm{m/s}$. **14.** $v = 132\,\mathrm{km/h}$. **15.** $v_c = 79{,}2\,\mathrm{km/h}$. **16.** $t = 108\,\mathrm{s}$. **17.** $v_A = 100\,\mathrm{km/h}$.

Capítulo 3: Movimento Uniformemente Variado

4. a) $v_0 = 8\,\mathrm{m/s}$, $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$, $v\,(7\,\mathrm{s}) = 22\,\mathrm{m/s}$; **b)** $v_0 = 16\,\mathrm{m/s}$, $a = -7\,\mathrm{m/s^2}$, $v\,(7\,\mathrm{s}) = -33\,\mathrm{m/s}$; **c)** $v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$, $a = -2\,\mathrm{m/s^2}$, $v\,(7\,\mathrm{s}) = -14\,\mathrm{m/s}$; **d)** $v_0 = 14\,\mathrm{m/s}$, $a = 1\,\mathrm{m/s^2}$, $v\,(7\,\mathrm{s}) = 21\,\mathrm{m/s}$; **e)** $v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$, $a = 1\,\mathrm{m/s^2}$, $v\,(7\,\mathrm{s}) = 7\,\mathrm{m/s}$. **5. a)** $S_0 = 8\,\mathrm{m}$, $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$, $a = 8\,\mathrm{m/s^2}$, $S\,(7\,\mathrm{s}) = 218\,\mathrm{m}$; **b)** $S_0 = 6\,\mathrm{m}$, $v_0 = -2\,\mathrm{m/s}$, $a = -4\,\mathrm{m/s^2}$, $S\,(7\,\mathrm{s}) = -106\,\mathrm{m}$; **c)** $S_0 = 0\,\mathrm{m}$, $v_0 = -2\,\mathrm{m/s}$, $a = 12\,\mathrm{m/s^2}$, $S\,(7\,\mathrm{s}) = 280\,\mathrm{m}$; **d)** $S_0 = -4\,\mathrm{m}$, $v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$, $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$, $S\,(7\,\mathrm{s}) = 45\,\mathrm{m}$; **e)** $S_0 = 0\,\mathrm{m}$, $v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$, $a = -1\,\mathrm{m/s^2}$, $S\,(7\,\mathrm{s}) = -24{,}5\,\mathrm{m}$; **f)** $S_0 = 3\,\mathrm{m}$, $v_0 = 2\,\mathrm{m/s}$, $a = 0\,\mathrm{m/s^2}$ (MU), $S\,(7\,\mathrm{s}) = 17\,\mathrm{m}$. **6.** $a = 2\,\mathrm{m/s^2}$, $v = 2t$, $S = 2 + t^2$, $S\,(3\,\mathrm{s}) = 11\,\mathrm{m}$, $S\,(10\,\mathrm{s}) = 102\,\mathrm{m}$, $S\,(20\,\mathrm{s}) = 402\,\mathrm{m}$. **7.** $S = -3 - 2t + 0{,}5t^2$, $v = -2 + t$, $S\,(12\,\mathrm{s}) = 45\,\mathrm{m}$. **9.** $t \simeq 1{,}355\,\mathrm{s}$, $S \simeq 12{,}1\,\mathrm{m}$. **10.** $S \simeq 293{,}7\,\mathrm{m}$. **11.** $a \simeq 19{,}3\,\mathrm{m/s^2}$, $t \simeq 1{,}44\,\mathrm{s}$. **12.** $v_0 = 40\,\mathrm{m/s}$.

Capítulo 4: Queda Livre e Lançamento Vertical

4. a) $5\,\mathrm{m}$; **b)** $15\,\mathrm{m}$; **c)** $25\,\mathrm{m}$; **d)** $80\,\mathrm{m}$; **e)** $140\,\mathrm{m}$. **5.** $t \simeq 1{,}41\,\mathrm{s}$, $v \simeq -14{,}1\,\mathrm{m/s}$. **6.** $h = 1125\,\mathrm{m}$, $v = -150\,\mathrm{m/s}$. **7.** $t = 4\,\mathrm{s}$, $v = -40\,\mathrm{m/s}$. **8.** $v \simeq -63{,}25\,\mathrm{m/s}$. **9.** $v_0 = 40\,\mathrm{m/s}$, $t = 1\,\mathrm{s}$. **10.** $t = 5\,\mathrm{s}$, $v = -8\,\mathrm{m/s}$. **11.** $g_{\mathrm{jup}} \simeq 24{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.

16. $h_{\max} = 125\,\text{m}$, $t_s = 5\,\text{s}$, $t_T = 10\,\text{s}$. **17.** $v_0 = 100\,\text{m/s}$, $t_T = 20\,\text{s}$, $v\,(S = 0\,\text{m}) = -100\,\text{m/s}$. **18.** $h_{\max} = 605\,\text{m}$, $t\,(S = 250\,\text{m}) = 2{,}574\,\text{s}$ e $t\,(S = 250\,\text{m}) = 19{,}43\,\text{s}$, $v\,(250\,\text{m}) = 84{,}3\,\text{m/s}$ e $v\,(250\,\text{m}) = -84{,}3\,\text{m/s}$, $t\,(S = 450\,\text{m}) = 5{,}432\,\text{s}$ e $t\,(S = 450\,\text{m}) = 16{,}57\,\text{s}$, $v\,(450\,\text{m}) = 55{,}7\,\text{m/s}$ e $v\,(450\,\text{m}) = -55{,}7\,\text{m/s}$, $v\,(S = 0\,\text{m}) = -110\,\text{m/s}$, $t_T = 22\,\text{s}$. **20.** $h_{\max} = 31{,}25\,\text{m}$, $t_s = 6{,}25\,\text{s}$, $t_d = 6{,}25\,\text{s}$, $t_T = 12{,}5\,\text{s}$, $v_0 = 17{,}89\,\text{m/s}$. **21.** $g \simeq 3{,}71\,\text{m/s}^2$ (Marte) e $h_{\max} \simeq 337\,\text{m}$.

Capítulo 5: Lançamentos em Duas Dimensões

2. $t = 16\,\text{s}$, $d = 48\,\text{m}$ e $v_{res} = \sqrt{34} \approx 5{,}83\,\text{m/s}$. **3.** $v_{res} = 200\,\text{km/h}$. **7.** $\Delta x = 60\,\text{m}$. **8.** $t \simeq 1{,}73\,\text{s}$, $\Delta x \simeq 346\,\text{m}$. **9.** $v_x = 20\,\text{m/s}$, $v_y = -200\,\text{m/s}$. **10.** $\Delta x \simeq 11.180\,\text{m}$, $v_y \simeq -447{,}2\,\text{m/s}$. **11.** $t \simeq 1{,}1\,\text{s}$, $\Delta x \simeq 5{,}5\,\text{m}$. **12.** $v_x \simeq 614\,\text{km/h}$. **13.** $v_x = 30\sqrt{3}\,\text{m/s}$ e $v_y = 30\,\text{m/s}$. **14.** $v_x = 20\sqrt{2}\,\text{m/s}$ e $v_y = 20\sqrt{2}\,\text{m/s}$. **15.** $v_x = \frac{5}{2}\,\text{m/s}$ e $v_y = \frac{5}{2}\sqrt{3}\,\text{m/s}$. **16.** $v_x = 0\,\text{m/s}$ e $v_y = 12\,\text{m/s}$. **17.** $v_x = 25\,\text{m/s}$ e $v_y = -25\sqrt{3}\,\text{m/s}$. **18.** $t_{\text{hmax}} \simeq 16{,}4\,\text{s}$. **19.** $h_{\max} \simeq 8{,}3\,\text{m}$. **20.** $t \simeq 126{,}8\,\text{s}$. **21.** $\Delta x \simeq 19{,}15\,\text{km}$. **22.** $t_s \simeq 28{,}27\,\text{s}$, $h_{\max} \simeq 4{,}00\,\text{km}$, $t_t \simeq 56{,}54\,\text{s}$ e $\Delta x \simeq 9{,}99\,\text{km}$. **23.** $v_0 \simeq 58{,}3\,\text{m/s}$ e $\theta \simeq 59°$. **24.** $h_{\max} = 923{,}75\,\text{m}$, $t_s \simeq 13\,\text{s}$, $t_d \simeq 13{,}6\,\text{s}$, $t_t \simeq 26{,}6\,\text{s}$, $\Delta x \simeq 2\,\text{km}$ e $v_f \simeq 155{,}3\text{m/s}$ com $\theta \simeq 299°$. **25.** $v_0 \simeq 8{,}71\,\text{m/s}$.

Capítulo 6: Movimento Circular Uniforme

2. $\frac{\pi}{2}\,\text{rad}$, $\frac{2\pi}{3}\,\text{rad}$ e $\frac{3\pi}{2}\,\text{rad}$. **3.** 30°, 135° e 360°. **4.** $v = 2\,\text{m/s}$. **5.** $f = 5\,\text{Hz}$ e $T = 0{,}2\,\text{s}$. **6.** $\omega \approx 1{,}57\,\text{rad/s}$. **7.** $a_c = 18\,\text{m/s}^2$. **8.** $v = 6\,\text{m/s}$ e $a_c = 120\,\text{m/s}^2$. **9.** $f = 100\,\text{Hz}$, $T = 0{,}01\,\text{s}$ e $\omega = 200\pi \approx 628\,\text{rad/s}$. **10.** $\omega = 20\,\text{rad/s}$. **11.** $\omega_{disco} = 10\,\text{rad/s}$ e $v = 1{,}5\,\text{m/s}$. **12.** $\omega \approx 7{,}3 \times 10^{-5}\,\text{rad/s}$. **13.** $T \approx 5864\,\text{s} \approx 97{,}7\,\text{min}$ e $a_c \approx 8{,}04\,\text{m/s}^2$.

Capítulo 7: Movimento Circular Uniformemente Variado

2. $\alpha = 15\,\text{rad/s}^2$. **3.** $\omega = 10\,\text{rad/s}$. **4.** $\alpha = -5\,\text{rad/s}^2$. **5.** $\theta = 24\,\text{rad} \approx 3{,}8$ voltas. **6.** $\omega = 2 + 4t$ e $\theta = 2t + 2t^2$; em $t = 3\,\text{s}$, $\omega = 14\,\text{rad/s}$ e $\theta = 24\,\text{rad}$. **7.** $\alpha = 10\,\text{rad/s}^2$. **8.** $a_t = 1{,}2\,\text{m/s}^2$. **9.** 4 voltas ($\theta = 8\pi\,\text{rad}$). **10.** $a_c = 10\,\text{m/s}^2$, $a_t = 0{,}8\,\text{m/s}^2$ e $a \approx 10{,}03\,\text{m/s}^2$. **11.** $\alpha \approx -19{,}1\,\text{rad/s}^2$ e $t \approx 6{,}28\,\text{s}$.

Bibliografia

BOLDRINI, José Luiz; COSTA, Sueli I. R.; FIGUEIREDO, Vera Lúcia; WETZLER, Henry G. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1986.

BONJORNO, José Roberto *et al*. **Física 1**: mecânica. 3. ed. São Paulo: FTD, 2016.

BONJORNO, José Roberto *et al*. **Física 2**: termologia, óptica, ondulatória. 3. ed. São Paulo: FTD, 2016.

BONJORNO, José Roberto *et al*. **Física 3**: eletromagnetismo, física moderna. 3. ed. São Paulo: FTD, 2016.

BOULOS, Paulo; CAMARGO, Ivan de. **Geometria analítica**: um tratamento vetorial. 2. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

BUTKOV, Eugene. **Física matemática**. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1988.

CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, Hygino H.; COSTA, Roberto C. F. **Álgebra linear e aplicações**. 6. ed. São Paulo: Atual, 1990.

CARRON, Wilson; GUIMARÃES, Osvaldo. **As faces da física**: volume único. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2002.

EISBERG, Robert; RESNICK, Robert. **Física quântica**: átomos, moléculas, sólidos, núcleos e partículas. Rio de Janeiro: Campus, 1979.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A**: funções, limite, derivação e integração. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GOLDSTEIN, Herbert; POOLE, Charles; SAFKO, John. **Classical mechanics**. 3rd ed. San Francisco: Addison Wesley, 2002.

GRIFFITHS, David J. **Introduction to electrodynamics**. 4th ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2017.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física**, volume 1: mecânica. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física**, volume 2: gravitação, ondas e termodinâmica. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física**, volume 3: eletromagnetismo. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de física**, volume 4: óptica e física moderna. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994. 2 v.

MACHADO, Kleber Daum. **Teoria do eletromagnetismo**, volume 1. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2000.

MACHADO, Kleber Daum. **Teoria do eletromagnetismo**, volume 2. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2002.

MACHADO, Kleber Daum. **Teoria do eletromagnetismo**, volume 3. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006.

MÁXIMO, Antônio; ALVARENGA, Beatriz. **Física**: volume único. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2007.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de física básica**, 1: mecânica. 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1981.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de física básica**, 2: fluidos, oscilações e ondas, calor. 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1983.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de física básica**, 3: eletromagnetismo. 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1997.

NUSSENZVEIG, H. Moysés. **Curso de física básica**, 4: ótica, relatividade, física quântica. 1. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1998.

OLIVEIRA, Mário José de. **Termodinâmica**. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2012.

REIF, Frederick. **Fundamentals of statistical and thermal physics**. New York: McGraw-Hill, 1965.

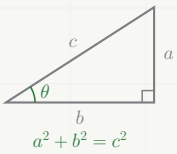
SAKURAI, J. J. **Modern quantum mechanics**. Rev. ed. Reading: Addison-Wesley, 1994.

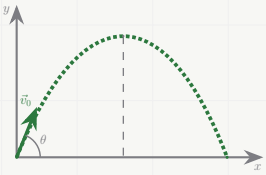
SALINAS, Silvio R. A. **Introdução à física estatística**. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2005.

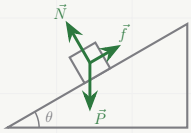
STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra linear**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1987.

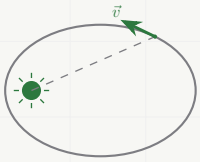
STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: Makron Books, 1987.

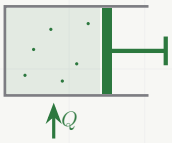
THORNTON, Stephen T.; MARION, Jerry B. **Classical dynamics of particles and systems**. 5th ed. Belmont: Brooks/Cole, 2004.

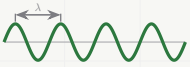






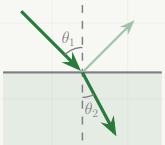






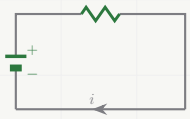
"Está inteiramente além de nosso poder medir as mudanças das coisas pelo tempo. Ao contrário, o tempo é uma abstração à qual chegamos pelas mudanças das coisas."

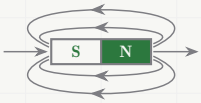
— Ernst Mach, *A ciência da mecânica* (1883)













ISBN 978-65-02-42505-3